

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI ILMIY JURNALI

Jurnal 2015 yilda tashkil topgan.
Yiliga 4 marta chop etiladi.

Ta'sischi:

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
huzuridagi Dasturiy mahsulotlar va apparat-dasturiy
majmualar yaratish markazi

Bosh muharrir:

Ravshanov N.

Bosh muharrir o'rnbosarları:

Azamov A.A., Mirzayev N.M.

Mas'ul kotib:

Nuraliyev F.M.

Tahririyat kollegiyasi:

Alimov I., Aloyev R.J., Arifov M.M.,
Bondarenko B.A., Chye Yen Un (Rossiya),
Gasanov E.E. (Rossiya), Ignatyev N.A.,
Ilyin V.P. (Rossiya), Ismagilov I.I. (Rossiya),
Kabanixin S.I. (Rossiya), Kabiljanov A.S.,
Karachik V.V. (Rossiya), Muhamadiyeva D.T.,
Muhamadiyev E. (Rossiya), Normurodov Ch.B.,
Starovoytov V.V. (Belarus), Samal D.I. (Belarus),
Shabozov M.Sh. (Tojikiston), Shodimetov H.M.,
Tashev A.A. (Qozog'iston), Uteuliyev N.U.,
Xo'jaev I.Q., Xo'jayorov B.X., Xayotov A.R.,
Xudayberdiyev M.H., Yuldashev T.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligida
2015 yil 5 avgust kuni ro'yxatga olingan.
Qayd etish guvohnomasi № 0856.
ISSN 2181-8460.

Materiallardan foydalilaniganida jurnalga havola
etilishi shart. Jurnalda chop etilgan dalillar va
keltirilgan ma'lumotlarning aniqligi uchun muallif
javobgardir.

Tahririyat manzili:

100125, Toshkent sh., Do'rmon yo'li ko'chasi, 25
Tel.: +(99871)237-62-34
E-mail: info@pvpm.uz
Sayt: <http://www.pvpm.uz>

Dizayn va kompyuter sahifalovchi:
Rasulov A.B., Axmedov D.

**Jurnalning web-sahifani yangilab boruvchi
mas'ul:**
Ergashev M.

TATU huzuridagi DMADMY markazi
bosmaxonasida chop etildi:
100125, Toshkent sh., Do'rmon yo'li ko'chasi, 25
Nashr etishga 18.03.2016 y. imzolandi
Format 60x84 1/8.
Buyurtma № 1. Adadi 100 nusxa.

№1 2016

MUNDARIJA

MATEMATIK MODELLASHTIRISH

| | |
|--|----|
| Alimov I., Tuxtanazarov D.S. | |
| Ko'p qatlamlı plastlardagi suyuqlik filtratsiyasi masalasining modellari va yechish usullari..... | 5 |
| Qurbanov N.M., Saliyev E.A. | |
| G'ovak muhittdagi neft, gaz va suv filtratsiyasi jarayoni tadqiqoti uchun hisob tajribalari..... | 13 |
| Nuraliyev F.M. | |
| Elektromagnit maydonlarning yupqa elektr o'tkazuvchan jismlarning deformatsion holatiga ta'sir etish jarayonlarini R-funksiya usulida matematik modellashtirish..... | 23 |
| Ravshanov N., Islomov Yu.N., Kukanova M. | |
| Uch qatlamlı g'ovak muhitda neft va gaz filtrasiyasi masalasini sonli modellashtirish..... | 29 |
| Xo'jaev I.Q., Mamadaliev X.A. | |
| Bosim qo'zg'alishlari so'ndiruvchisi ulangan qurvurda to'lqin tarqalishi masalasining matematik modeli va analitik yechimi..... | 46 |
| Sharipov D.K., Toshtemirova N., Narzullayeva N. | |
| Yer sathi relefini hisobga olgan holda zaxarli moddalarni atmosferada tarqalishini sonli modellashtirish..... | 60 |

HISOBLASH MATEMATIKASI

| | |
|--|-----|
| Aloyev R.D., Xudoyberganov M.U. | |
| Giperbolik sistemalar uchun oshkor ayirmali sxemalarning urg'unligi..... | 72 |
| Mirzayev A.E., Xalilov S.P. | |
| Bir o'lchovli splaynlar asosida funksional bog'liqlik metodlarini modellashtirish..... | 88 |
| Rustamov N.T., Porsayev G.M. | |
| Faol tizimni potensiali va uni turg'unligi..... | 91 |
| Shodimetov H.M., Jalolov O.I. | |
| Sobolev fazosida Ermit tipidagi kubatur formula hatolik funktsionalining normasini hisoblash va yaginlashish tartibi bueicha optimal kubatur formula gurish..... | 100 |

DASTURLASH TEKNOLOGIYALARI

| | |
|---|-----|
| Utevliev N.U., Abdalieva G.R., Sernazarov R.A., Achilov D.S. | |
| Web-dasturlash tillari yordamida matn tarjimalovchi dastur yaratish..... | 106 |

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ПРОБЛЕМЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

Журнал основан в 2015 году.

Издается 4 раза в год.

Учредитель:

Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий

Главный редактор:

Равшанов Н.

Зам. главного редактора:

Азамов А.А., Мирзаев Н.М.

Ответственный секретарь:

Нуралиев Ф.М.

Редакционная коллегия:

Алимов И., Алоев Р.Ж., Арипов М.М.,

Бондаренко Б.А., Гасанов Э.Э. (Россия),

Игнатьев Н.А., Ильин В.П. (Россия),

Исмагилов И.И. (Россия),

Кабанихин С.И. (Россия), Кабильджанов А.С.,

Карачик В.В. (Россия), Мухамадиев Э. (Россия),

Мухамедиева Д.Т., Нормуродов Ч.Б.,

Старовойтов В. В. (Беларусь),

Самаль Д.И. (Беларусь), Тащев А.А. (Казахстан),

Утеулиев Н.У., Хаётов А.Р., Худайбердиев М.Х.,

Хужаев И.К., Хужаев Б.Х., Чье Ен Ун (Россия),

Шабозов М.Ш (Таджикистан), Шадиметов Х.М.,

Юлдашев Т.

Журнал зарегистрирован в Узбекском Агентстве по печати и информации. Регистрационное свидетельство за № 0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460.

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна. За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 25

Тел.: +(99871)237-62-34

E-mail: info@pvpm.uz

Сайт: <http://www.pvpm.uz>

Дизайн и компьютерная верстка:

Расулов А.Б., Ахмедов Д.

Ответственный за обновление веб-страницы

журнала:

Эргашев М.

Отпечатано:

в типографии Центра РППиАПК при ТУИТ

100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 25

Подписано в печать 18.03.2016 г.

Формат 60x84 1/8.

Заказ № 1. Тираж 100 экз.

№1 2016

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алимов И., Тухтанизаров Д.С.

Модели и методы решения задачи фильтрации жидкости в многослойных пластах..... 5

Курбонов Н.М., Салиев Э.А.

Вычислительный эксперимент для исследования процесса фильтрации нефти, газа и воды в пористой среде..... 13

Нуралиев Ф.М.

Математическое моделирование влияния электромагнитных полей на деформированное состояние тонких электропроводных тел методом R-функций..... 23

Равшанов Н., Исломов Ю.Н., Куканова М.

Численное моделирование задачи фильтрации нефти и газа в трехслойной пористой среде..... 29

Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А.

Квазидимерная модель и аналитическое решение задачи о распространении волн в трубопроводе с демпфером возмущений давления..... 46

Шарипов Д.К., Тоштемирова Н., Нарзуллаева Н.

Численное моделирование процесса распространения вредных веществ в атмосфере с учетом рельефа местности..... 60

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Алоев Р.Д., Худойберганов М.У.

Устойчивость явных разностных схем для гиперболических систем..... 72

Мирзаев А.Э., Халилов С.П.

Моделирование методов функциональных зависимостей на основе одномерных сплайнов..... 88

Рустамов Н.Т., Порсаев Г.М.

Потенциал активной системы и ее устойчивость..... 91

Шадиметов Х.М., Жалолов О.И.

Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева..... 100

ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Утеулиев Н.У., Абдалиева Г.Р., Серназаров Р.А.,

Ачилов Д.С.

Создание программы перевода текстов с помощью языков web-программирования..... 106

**SCIENTIFIC JOURNAL
PROBLEMS OF
COMPUTATIONAL AND
APPLIED MATHEMATICS**

The journal was established in 2015.
4 issues are published per year.

Founder:

Centre for the development of software and hardware- program complexes at Tashkent university of information technologies

Editor-in-chief:

Ravshanov N.

Deputy editor:

Azamov A.A., Mirzaev N.M.

Executive secretary:

Nuraliev F.M.

Editorial board members:

Alimov I., Aloev R.J., Aripov M.M.,

Bondarenko B.A., Chye En Un (Russia),

Gasanov E.E. (Russia), Hayotov A.R.,

Hudayberdiev M.H., Hujayorov B.B., Hujaev I.K.,

Ignatyev N.A., Ilyin V.P. (Russia),

Ismagilov I.I. (Russia), Kabanikhin S.I. (Russia),

Kablyjanov A.S., Karachik V.V. (Russia),

Muhamadiev E. (Russia), Muhamedieva D.T.,

Normurodov Ch.B., Starovoytov V.V. (Belarus),

Samal D.I. (Belarus), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),

Shadimetov H.M., Tashev A.A. (Kazakhstan),

Uteuliev N.U., Yuldashev T.

The journal is registered in the Uzbek Agency of Press and Information. The registration certificate for the № 0856 on August 5, 2015.

ISSN 2181-8460.

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory. Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Editorial address:

100125, Tashkent, Durmon yuli st., 25

Tel.: +(99871)237-62-34

E-mail: info@pvpm.uz

Website: <http://www.pvpm.uz>

Design & Computer imposition:

Rasulov A.B., Ahmedov D.

**Responsible for updating the web-page
of the journal:**

Ergashev M.

Printing office of the Center of DS and HPC at TUIT

100125, Tashkent, Durmon Yuli st., 25

Signed for print 18.03.2016.

Format 60x84 1/8.

Order № 1. Print run 100 copies.

№1 2016

CONTENS

MATHEMATICAL MODELLING

Alimov I., Tuxtanazarov D.S.

Models and methods of solving of tasks fluid filtration in multilayered strata.....5

Kurbanov N.M., Saliev E.A.

Computer experiment to study of filtration oil, gas and water in a porous medium.....13

Nuraliev F.M.

Mathematical modeling of processes of the electromagnetic fields' effects on deformational condition of thin conductive bodies by the method of R-function.....23

Ravshanov N., Islomov Yu.N., Kukanova M.

Numerical modeling of the filtration problem of oil and gas in three-layer porous medium.....29

Hujaev I.K., Mamadaliev H.A.

Quasi one-dimensional model and analytical solution of the problem of wave propagation in the pipeline with a damper of pressure disturbances.....46

Sharipov D.K., Toshtemirova N., Narzullayeva N.

Numerical modeling of the spread of harmful substances in the atmosphere taking into account terrain.....60

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Aloev R.D., Xudoyberganov M.U.

Stability of explicit finite difference schemes for hyperbolic system.....72

Mirzaev A.E., Xalilov S.P.

Simulation of methods of functional dependencies on the basis of one-dimensional splines.....88

Rustamov N.T., Porsaev G.M.

Capacity of active system and its stability.....91

Shodimetov H.M., Jalolov I.F.

Calculation the norm of the error functional by order convergence of the optimal cubature formulas type Ermit in the Sobolev space.....100

PROGRAMMING TECHNOLOGIES

Uteuliev N.U., Abdalieva G.R., Sernazarov R.A.,

Achilov D.S.

Development of texts translation software using web programming languages.....106

Настоящий номер научного журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящен проблемам математического моделирования и вычислительного эксперимента применительно к решению задач массопереноса в пористых средах, уточнения основных параметров разработки и добычи углеводородов, мониторинга экологического состояния промышленных регионов, определения влияния электромагнитных полей на состояние электропроводных тел и т.д.

Статьи, вошедшие в данный номер, содержат полученные авторами результаты исследований в соответствующих предметных областях.

В частности, в статье Алимова И. и Тухтанизарова Д.С. приведена математическая модель для решения задачи фильтрации жидкости в многослойных пластах в случае, когда плохо проницаемые слои разделены хорошо проницаемым слоем. Авторами приведены результаты вычислительного эксперимента и их сравнение с результатами расчетов по другим моделям разработки многослойных месторождений.

В работе Равшанова Н., Исломова Ю.Н., Кукаевой М. приведены математическая модель и численный алгоритм для решения задачи неустановившейся фильтрации нефти и газа в неоднородных пористых средах, обладающих различными гидрогеологическими характеристиками. При разработке математической модели авторами были учтены изменения давления в фильтрационных слоях по времени и по пространственным переменным в зависимости от коэффициентов фильтрации, пьезопроводности, мощности пластов.

Статья Нуралиева Ф.М. посвящена математическому моделированию влияния электромагнитных полей на деформированное состояние тонких электропроводных тел структурным методом R-функций В.Л. Рвачева. Автором решается задача магнитоупругости тонких пластин и оболочек со сложной формой. В качестве примера в расчетах взята медная пластина круглой формы с двумя круговыми вырезами, находящаяся под действием электромагнитного поля и равномерно распределенной нагрузки. Исследована сходимость предложенного вычислительного алгоритма относительно количества координатных функций структуры решений.

Прогнозирование экологического состояния промышленных регионов рассмотрено в статье Шарипова Д.К., Тоштемировой Н. и Наззуллаевой Н. Авторами приведены численная модель и вычислительный алгоритм для исследования, прогнозирования процесса распространения вредных аэрозольных веществ в атмосфере с целью принятия управлеченческих решений по минимизации возможных экологических рисков. При выводе модели объекта были учтены основные погодно-климатические факторы, действующие на исследуемый процесс, а также такой существенный параметр как рельеф местности рассматриваемого региона. Также в работе рассмотрено использование геоинформационных веб-сервисов в качестве источников входных данных для расчетных программных модулей.

Устойчивость явных разностных схем для гиперболических систем рассмотрена в работе Алоева Р.Д. и Худойберганова М.У. В статье рассматриваются современные численные методы решения уравнений в частных производных гиперболических систем. Данная работа представляет интерес для исследователей, которые сталкиваются с необходимостью решения гиперболических систем в различных областях механики, физики и прикладной математики. Авторами представлены и классифицированы различные численные методы (явные разностные схемы), изложенные на основе единого общего подхода. Исследован вопрос устойчивости некоторых известных разностных схем, таких как схема Годунова, Лакса и Русанова, а также новых явных разностных схем.

УДК 622.234

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

Алимов И.

д.т.н., профессор, ведущий научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99871) 262-72-67

Тухтаназаров Д.С.

старший научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и
аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99894) 621-21-92, e-mail: Dilmurod_84@inbox.ru

Приведены физическая и математическая промежуточные модели для решения задачи фильтрации жидкости в многослойных пластах с плохо проницаемыми слоями, разделенными с хорошо проницаемым слоем. Разработаны вычислительный алгоритм и программа для промежуточной модели. Проведен вычислительный эксперимент для сравнения результатов с другими моделями для разработки многослойных месторождений. На основе анализа численных результатов утверждается, что промежуточная модель является оптимальной в смысле затраты машинного времени и малого объема памяти вычислительной техники.

Ключевые слова: математическая модель, пласт, жидкость, фильтрация, модель, проницаемость, напор, пористость, вязкость, распределения, алгоритм, плохо проницаемые, хорошо проницаемые, скважина.

MODELS AND METHODS
OF SOLVING OF TASKS FLUID FILTRATION
IN MULTILAYERED STRATA
Alimov I., Tuxtanazarov D.S.

The paper presents the physic and mathematic models for fluid filtration in the multilayered strata with poorly permeable and well permeable layer. Developed computational algorithm and program for the intermediate model. Shows computer experiment compared the results with other modules for the development of a multilayered reservoir field. Based on analysis numerical results are that the approval of the interim model is optimal in terms of efficiency of computer time and memory consumption of computer technology.

Keywords: mathematic model, layer, fluid, filtration, model, permeability, pressure, porosity, viscosity, distribution, algorithm, poorly permeable, well permeable, chink.

КО'Р QATLAMLI PLASTLARDAGI SUYUQLIK
FILTRATSIYASI MASALASINING MODELLARI
VA YECHISH USULLARI
Alimov I., Tuxtanazarov D.S.

Maqolada ko'p qatlamlı plastlardagi suyuqlik filtratsiyasi masalasi uchun fizik va matematik modellar keltirilgan. Oraliq modeli uchun hisoblash algoritmi va dastur yaratilgan. Yaratilgan algoritm orqali yaxshi va yomon o'tkazuvchi qatlamlarning bosim qiymatlari va qatlamlar orasidagi sizib o'tuvchi suyuqliknинг qiymatlari aniqlangan. Oraliq model yordamida hisoblashlarni bir muncha kamaytirgan xolda boshqa modellardan katta farq qilmaydigan natijalar olingan.

Tayanch iboralar: математик модель, qatlaml, suyuqlik, filtratsiya, модель, о'tkazuvchanlik, bosim, g'ovaklik, yopishqoqlik, sizib o'tuvchi, algoritm, yomon o'tkazuvchanlik, yaxshi o'tkazuvchanlik, quduq.

1. Введение

Многие нефтяные и газоконденсатные месторождения представляют собой совокупность залежей, т.е. являются многопластовыми. В некоторых случаях продуктивный горизонт целесообразно подразделять на отдельные пачки, особенно если они разобщены друг от друга достаточно выдержаными по площади пропластками, например глинистыми.

Для теории и практики разработки многопластовых жидкостей месторождений важно установить проницаемость, слабую проницаемость или непроницаемость разделяющих перемычек. В некоторых случаях по данным разведочных скважин можно ответить на данный вопрос.

Если одновременно выполняются условия:

1) распределение начальных пластовых давлений по горизонтам подчиняется барометрической формуле;

2) контакты газ - вода находятся на одной отметке;

3) составы жидкостей во всех горизонтах одинаковы,

то с достоверностью можно сказать о проявлении гидродинамической связи по крайней мере за геологическое время. В таких случаях при проведении прогнозных расчетов следует иметь в виду возможность проявления гидро-динамической связи в процессе разработки многопластового месторождения.

При невыполнении указанных условий, а также при распределении начального давления в горизонтах по гидростатическому закону можно с уверенностью говорить об изолированности между собой продуктивных горизонтов. При указанной идентификации следует иметь в виду возможность отсутствия гидродинамической связи между пластами и наличие гидродинамической связи в области водоносности. Тогда одно из перечисленных условий может выполняться.

2. Постановка задачи

При разработке многопластовых месторождений могут реализоваться совместная, раздельная, комбинированная и совместно-раздельная сетки скважин (рис. 1, 2). В первом случае каждая скважина одновременно дренирует два пласта и более. Во втором случае на каждую залежь или пачку бурится своя система скважин.

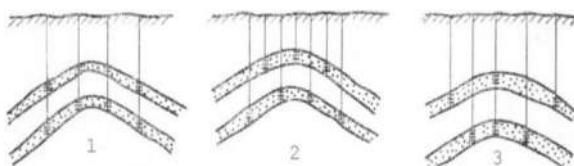


Рис.1. Схема дренирования двухпластового месторождения единой (1), раздельной (2) и комбинированной (3) сетками скважин

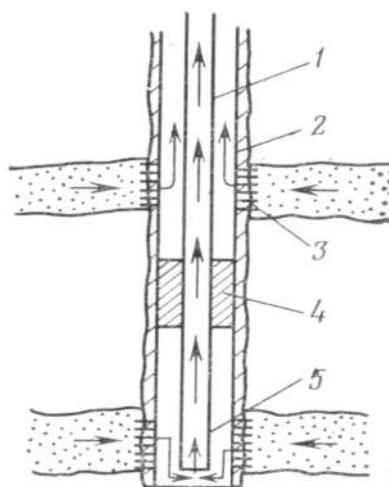
Для разобщения потока жидкости используется пакер.

Продукция нижнего пласта поступает на поверхность по насосно-компрессорным трубам (НКТ), верхнего – по затрубному пространству.

Раздельная сетка скважин применяется в следующих случаях. Каждый из пластов характеризуется высокой продуктивностью.

Нефть одного из горизонтов содержит, а другого не содержит кислые или другие компоненты.

Начальные пластовые давления в горизонтах существенно различаются.



1 - поток жидкости в НКТ из нижнего пласта;

2 - эксплуатационная колонна;

3 - перфорационные отверстия;

4 - пакер; 5 - НКТ

Рис.2. Схема одновременной раздельной эксплуатации двухпластового месторождения

Один из горизонтов может разрабатываться при одном, а другой при другом технологическом режиме эксплуатации (например, один представлен рыхлым, а другой – устойчивым коллектором).

Если нет указанных ограничений, то экономически целесообразной может оказаться совместная сетка скважин.

Компромиссным между раздельной и совместной разработками служит вариант одновременной раздельной эксплуатации одной скважиной двух пластов.

При раздельной разработке многопластового месторождения потребное число скважин для добычи заданного количества жидкости к концу периода постоянной добычи часто превышает число скважин для совместной разработки одной сеткой скважин нескольких пластов. Однако только число скважин не определяет эффективность системы разработки. Так, при исследовании варианта раздельной эксплуатации обычно рассматриваются скважины меньшего диаметра, чем для варианта совместной разработки. Следовательно, с точки зрения экономии здесь не все сразу очевидно. При этом не только экономические аспекты приходится принимать во внимание.

Наличие гидродинамической связи между пластами может значительно влиять на все технико-экономические показатели разработки многопластовых месторождений. При составлении проекта опытно-промышленной эксплуатации, к сожалению, трудно бывает оценить роль слабо-проницаемой перемычки между пластами на прогнозные показатели разработки. Однако появляется реальная возможность для учета данного фактора при составлении проекта промышленной разработки, и тем более проекта доразработки месторождения.

Для месторождений рассматриваемого типа могут представлять интерес в плане технико-экономического исследования, например, варианты разработки, представленные на рис. 3,4.

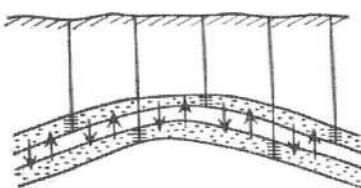


Рис. 3. Раздельные сетки скважин при наличии газодинамической связи между пластами

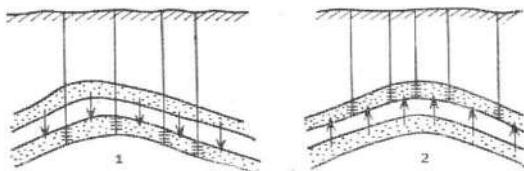


Рис.4. Разработка двухпластового месторождения (при наличии газодинамической связи) за счет дренажирования скважинами нижнего (1) и верхнего (2) пластов

Как и в предыдущем случае, на каждый пласт может буриться своя сетка скважин. Могут использоваться совместная, одновременная раздельная и комбинированная сетки скважин.

В отличие от предыдущего случая, многопластовое месторождение при наличии гидродинамической связи может разрабатываться одной сеткой скважин, пробуренных на нижний или только на верхний пласт (рис. 4).

Предположим, что верхний продуктивный пласт обладает низкими коллекторскими свойствами или представлен несцементированным песком. В обоих случаях дебиты скважин могут оказаться малыми, а потребное число скважин на разработку верхнего горизонта – значительным. В случае, если продуктивность скважин, пробуренных на нижний пласт, высока, то целесообразно бурить эксплуатационные скважины только на этот горизонт. Тогда верхний пласт будет отработан за счет перетока жидкости в нижний пласт вследствие значительной площади контакта между горизонтами, даже в случае низких коэффициентов проницаемости слабопроницаемой перемычки. Обменные процессы могут оказаться интенсивными.

Таким образом, при проектировании и реализации проекта разработки многопластового месторождения при наличии гидродинамической связи между пластами необходимо считаться с обменными процессами (в основном по газу) между отдельными горизонтами. Направление и интенсивность перетоков нефти здесь почти целиком зависят от принятых проектных решений.

В теории и практике разработки нефтяных и газовых месторождений приходится сталкиваться с необходимостью учитывать при проектировании и анализе процессов разработки многопластовых месторождений наличие гидро- или гидродинамической связи между пластами [1, 2].

Сообщение между пластами может возникать вследствие их непосредственного контакта (рис. 5).

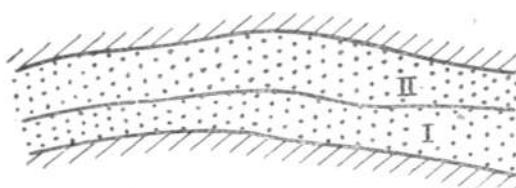


Рис. 5. Схема непосредственного контакта продуктивных пластов I и II

Решение задач разработки при наличии подобной связи между пластами требует значительной (и трудно определимой) информации об изменении параметров пластов в направлении осей x , y и z .

На границе между пластами должны соблюдаться условия непрерывности потока

$$\frac{k_1}{\mu} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{k_2}{\mu} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial n} \quad (1)$$

и неразрывности давления

$$p_1(x, y, t) = p_2(x, y, t). \quad (2)$$

Здесь k_1, k_2 - коэффициент проницаемости в пластах по направлению нормали n , p_1, p_2 - давления, величины с индексом 1 относятся к нижнему пласту, с индексом 2 - к верхнему.

3. Обзор работ

Решению задач подземной газогидродинамики при соблюдении условий типа (1) и (2) посвящено сравнительно небольшое число исследований (М.Т. Абасов, З.Б. Адигамов, К.Н. Джалилов, В.А. Карпичев, Ж-Дюво, М. Дюпон). Условия (1) и (2) приходится учитывать и при решении плоских задач, когда параметры пласта по площади или вдоль координаты x или y (одномерные задачи) изменяются скачкообразно. Исследование таких задач описывается в работах Г.И. Баренблатта, Г.Г. Вахитова, Г.Л. Говоровой, М.А. Гусейнзаде, М.М. Саттарова, В.Н. Щелкачева. Вследствие близости названных задач методы решения одних можно использовать применительно к другим (Мухитдинов Н.М., Арсланов А.А, Абуталиев Ф.Б., Алимов И. [3-5]).

В настоящее время численные методы «сквозного» счета позволяют эффективно решать фильтрационные задачи подобного рода без специального выделения условий сопряжения на границах пластов или зон неоднородности.

Часто пласти разделяются слабопроницаемой перемычкой (рис. 6). В этом случае задачи теории фильтрации могут рассматриваться как двумерные. Следовательно, задача упрощается и даже возможно построение аналитических решений для определенных схематизированных фильтрационных течений. Кроме того, существенно облегчается получение необходимой для данного класса задач информации о коллекторских свойствах пластов. Наличие гидродинамической связи между пластами учитывается соответствующей записью дифференциальных уравнений неустановившейся фильтрации нефти.

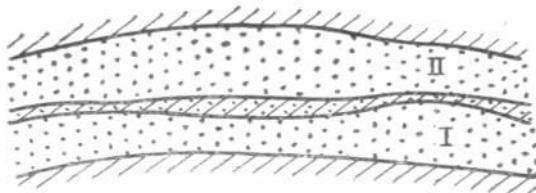


Рис. 6. Продуктивные пласти I и II, разделенные слабопроницаемой перемычкой

Задача о движении нефти в пласте к скважинам весьма сложная. Когда пласти считаются многослойными, она усложняется еще во много раз. Исследование таких задач посвящены и изучены с некоторыми допущениями работы [3-6].

В работе [5] на основе изученных задач во взаимодействующих пластах предлагается так называемая промежуточная модель (ПМ). В данной статье эта модель приводится применительно к решению трехслойного взаимодействующего пласта.

4. Постановка задачи

Пусть имеется трехслойный взаимодействующий пласт с областью D , со средней хорошо проницаемой и двумя крайними плохо проницаемыми перемычками (рис. 7).

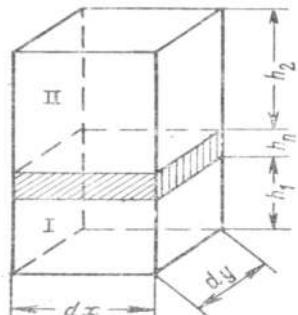


Рис. 7. Элементарный объем при наличии между пластами хорошо проницаемой перемычки

Требуется определить непрерывную функцию давления $P_i(x, y, z, t)$, удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_1(x, y, z) \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_1(x, y, z) \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_1(x, y, z) \frac{\partial P_1}{\partial z} \right) = M_1(x, y, z) \frac{\partial P_1}{\partial t}; \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_2(x, y, z) \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_2(x, y, z) \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_2(x, y, z) \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) = \\ & = M_2(x, y, z) \frac{\partial P_2}{\partial t} + F(x, y, z, t); \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_3(x, y, z) \frac{\partial P_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_3(x, y, z) \frac{\partial P_3}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_3(x, y, z) \frac{\partial P_3}{\partial z} \right) = M_3(x, y, z) \frac{\partial P_3}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при начальных

$$P_i(x, y, z, 0) = \varphi_i(x, y, z) \quad (4)$$

и граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial P_i}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Здесь P_i — давления; K_i, M_i, F_i — заданные функции своих аргументов; $i = 1, 2, 3$, n — внешняя нормаль к Γ ; Γ — поверхность рассматриваемой области фильтрации D .

В качестве функции $\varphi_i(x, y, z)$ чаще берут постоянную величину, характеризующую невозмущенность пласта в начальный момент времени при пренебрежении весом столба жидкости в пределах мощности i -го пропластика. Согласно модели Хантуша, вместо решения задачи (3)-(5) имеем более упрощенную задачу:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right) = \\ & = M_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} + F(x, y, t) - q_2; \\ & \vartheta_2|_{t=0} = \phi_2(x, y); \quad P_i|_{t=0} = \phi_i(x, y, z); \\ & P_1|_{z=h_1-0} = \vartheta_2|_{z=h_1+0}; \quad P_3|_{z=h_2+0} = \vartheta_2|_{z=h_2+0}; \\ & q_2 = q_1 + q_3; \quad q_i = \frac{K}{h_i - h_{i-1}} \left. \frac{\partial P_i}{\partial z} \right|_{z=h_i}; \\ & \vartheta_2 = \frac{1}{h_2 - h_1} \int P_2(x, y, z, t) dz, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где q_i — переток, $i = 1, 3$.

Итак, вместо пространственной исходной задачи (3)-(5) была получена сравнительно простая квазитрехмерная задача (6). В работе [6] рассмотрена задача по этой постановке, приведены методы решения в тестовых данных, получены и проанализированы результаты. Однако перед

исследователями все-таки возникают трудности при решении задачи по полученной модели, занимая больше памяти и времени. С этой целью применяем несколько упрощенную модель, чем модели Хантуша, промежуточную модель.

В задаче (6), осредняя движения по пространственным переменным для определения величин перетока между слоями и изменения значений давления в перемычках, получаем так называемую модель материального баланса:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K_i(z) \frac{\partial \vartheta_i}{\partial z} \right] = M_i \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t}; \quad h_{i-1} < z < h_i; \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\vartheta_i|_{t=0} = \phi_i(z); \quad z \in [h_{i-1}, h_i],$$

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial z} \Big|_{z=h_0, h_3} = 0; \quad \vartheta_i|_{z=h_1, h_2} = \bar{\vartheta}_2,$$

$$\vartheta_i = \int_0^1 \int_0^1 P_i(x, y, z, t) dx dy; \quad i = 1, 3;$$

здесь $\bar{\vartheta}_2 = \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\vartheta_{2l,j}}{N_x \cdot N_y}$, где N_x, N_y - количество

узлов по x, y .

Изменение поля давления в хорошо проницаемом пласте определяется с решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right) &= \\ = M_i \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} + F(x, y, t) - q_{n2} & \end{aligned} \quad (8)$$

с соответствующими начальным и граничным условиями.

5. Метод решения

Для численного решения задачи переходим к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{K}{K_x}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_x}, \\ \bar{x} &= \frac{x}{L_x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L_y}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L_z}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_x}, \\ Q &= A \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i, y - y_i) q_i, \\ A &= \frac{L_x \mu_x}{K_x P_x L_y L_z}, \\ t &= \tau \frac{K_x}{\mu_x L_x^2}, \quad Q p_x = \frac{L_x \mu_x}{K_x P_x L_y L_z} q_{n2}. \end{aligned}$$

Для удобства записи опускаем черточки над переменными.

Здесь q_{n2} - функция перетока, выступающая в качестве равномерно распределенного внутреннего стока.

Таким образом, усложненная исходная задача (6) сведена к последовательному решению одномерных (7) и двумерной (8) задач.

Для решения задачи (8) применяем метод продольно поперечной схемы [7, 8] и потокового варианта метода прогонки.

Для этого заданную двумерную область покрываем равномерной сеткой:

$$\begin{aligned} \omega_{x,y} &= \{(x_i = i \cdot h_x, \quad h_x = \frac{1}{N_x}, \quad y_j = j \cdot h_y, \\ h_y &= \frac{1}{N_y}), \quad i = \overline{1, N_x}, \quad j = \overline{1, N_y}\}. \end{aligned}$$

В уравнении (8) вводим переменные в виде, необходимом для применения потоковой прогонки:

$$w_x = K \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}, \quad w_y = K \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}.$$

Тогда (8) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = m \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} + Q - q_{n2}. \quad (9)$$

Конечно-разностный вид уравнения (9) при вычислении с использованием продольно-поперечной схемы следующий:

$$\begin{aligned} \left(w_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{k+1} - w_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^{k+1} \right) &= m_{i,j} \frac{h_x}{\tau} \vartheta_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{h_x}{\tau} F_i; \\ F_i &= \tau \cdot \left(Q_{i,j} - \left(q_{n2} + \frac{w_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^k - w_{y_{i,j-\frac{1}{2}}}^k}{h_y} \right) \right) - m_{i,j} \vartheta_{2i,j}^k; \\ \left(w_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{k+1} - w_{y_{i,j-\frac{1}{2}}}^{k+1} \right) &= m_{i,j} \frac{h_y}{\tau} \vartheta_{2i,j}^{k+1} + \frac{h_y}{\tau} F_j; \\ F_j &= \tau \cdot \left(Q_{i,j} - \left(q_{n2} + \frac{w_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{k+1} - w_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^{k+1}}{h_x} \right) \right) - m_{i,j} \vartheta_{2i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (7) вводим переменные в виде, необходимом для применения потоковой прогонки:

$$w_z = K \frac{\partial \vartheta_i}{\partial z}, \quad i = 1, 3.$$

Тогда (7) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = m \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t}, \quad i = 1, 3. \quad (11)$$

Конечно-разностный вид уравнения (11):

$$\begin{aligned} \left(w_{z_{j+\frac{1}{2}}}^{k+1} - w_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{k+1} \right) &= m_j \frac{h_z}{\tau} \vartheta_{ij}^{k+1} + \frac{h_z}{\tau} F_i, \\ F_i &= -m_j \vartheta_{ij}^k, \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

В параметризованном виде граничные условия запишем в виде

$$\left[\lambda \frac{\partial \vartheta_i}{\partial n} + (1 - \lambda) \vartheta_i \right]_\Gamma = \gamma, \quad i = 1, 2, 3.$$

Параметр λ принимает значение 0 или 1 (при $\lambda = 0$ первое граничное условие, при $\lambda = 1$ второе граничное условие).

Для вычисления (10) и (12) методом потоковой прогонки [6] используем алгоритм следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_N &= \frac{-\lambda_2}{0.5 \cdot \lambda_2 + (1 - \lambda_2)}, \quad \beta_N = \frac{\lambda_2 - 0.5 \cdot \lambda_2 * F_N}{0.5 \cdot \lambda_2 + (1 - \lambda_2)}, \\ j &= (N_x - 1) \dots 0, \quad j = (N_y - 1) \dots 0, \\ \alpha_j &= \frac{\frac{h^2}{\tau} - \alpha_{j+1}}{1 + \frac{h^2}{\tau} - \alpha_{j+1}}, \quad \beta_j = \frac{\beta_{j+1} - F_j \left(\frac{h^2}{\tau} - \alpha_{j+1} \right)}{1 + \frac{h^2}{\tau} - \alpha_{j+1}} \\ g_{i0} &= \frac{\frac{h}{\tau} \cdot \lambda_1 \cdot \beta_0 - \gamma_1 \cdot \left(\alpha_0 - \frac{h^2}{\tau} \right) - 0.5 \frac{h}{\tau} \lambda_1 \cdot F_0 \cdot \left(\alpha_0 - \frac{h^2}{\tau} \right)}{\left((1 - \lambda_1) - 0.5 \cdot \frac{h}{\tau} \lambda_1 \right) \cdot \left(\alpha_0 - \frac{h^2}{\tau} \right) + \frac{h}{\tau} \lambda_1} \\ j &= 0 \dots (N_x - 1), \quad j = 0 \dots (N_y - 1), \\ g_{ij+1} &= \left(\frac{\alpha_{j+1}}{\frac{h^2}{\tau} - \alpha_{j+1}} \right) \cdot \left(\beta_{j+1} - g_{ij} \right) + \beta_{j+1}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right\}$$

6. Вычислительный эксперимент

Созданы программные обеспечения для методов с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi.

Для проверки достоверности полученные результаты по разработанным алгоритмам сопоставлены с результатами пробных функций.

Пределы применимости этой модели и оценки величин $\|P_i - g_i\|_c$; $\|g_i - W_i\|_c$; $\|P_i - W_i\|_c$ приведены в работе [5]. Для анализа результатов по промежуточной модели и сравнения их с результатами расчетов, полученными по модели Хантуша, за основу расчетов приняты следующие исходные данные:

$$P_i|_{t=0} = 100 \text{ atm}; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0.2; \quad k_2 = 0.2;$$

$$\begin{aligned} k_1 &= k_3 = 0.05; \quad h_0 = 0; \quad h_1 = 1/12; \quad h_2 = 11/12; \quad h_3 = 1; \\ \phi_i &= 1; \quad \mu = 2; \quad \Delta x = 0.01; \quad \Delta y = 0.01; \quad \Delta z = 0.02; \\ \tau &= \frac{Lx \cdot Lx}{86400}; \quad Lx = 1000 \text{ м}; \quad Ly = 1000 \text{ м}; \quad Lz_2 = 100 \text{ м}; \\ Lz_1 &= Lz_3 = 50 \text{ м}. \end{aligned}$$

Значения отборов и координаты расположения скважин приведены в табл.1.

Таблица 1
Данные скважины

| № п/п | $x, \text{ м}$ | $y, \text{ м}$ | $10^3 \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{сум}}$ |
|-------|----------------|----------------|--|
| 1 | 200 | 200 | 10 |
| 2 | 200 | 400 | 10 |
| 3 | 200 | 600 | 10 |
| 4 | 200 | 800 | 10 |
| 5 | 400 | 200 | 10 |
| 6 | 400 | 400 | 10 |
| 7 | 400 | 600 | 10 |
| 8 | 400 | 800 | 10 |
| 9 | 600 | 200 | 10 |
| 10 | 600 | 400 | 10 |
| 11 | 600 | 600 | 10 |
| 12 | 600 | 800 | 10 |
| 13 | 800 | 200 | 10 |
| 14 | 800 | 400 | 10 |
| 15 | 800 | 600 | 10 |
| 16 | 800 | 800 | 10 |

Распределения давления хорошо проницаемого пласти и значения перетока из перемычки за счет симметричности расположения отбираемых точек (скважин) симметричны относительно к средним пластам. Поэтому соответственно в табл. 2 и 3 приведены их значения в четверти поля. Для полного представления их значения на рис. 8 представлены в виде карты изолиний в момент времени $T = 720$ сут.

Таблица 2

Значения хорошо проницаемого пласти

| 500 | 0.998 | 0.998 | 0.996 | 0.995 | 0.994 | 0.993 | 0.994 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 150 | 0.998 | 0.997 | 0.996 | 0.994 | 0.992 | 0.993 | 0.993 | 0.992 | 0.991 | 0.992 | 0.993 |
| 400 | 0.998 | 0.997 | 0.996 | 0.993 | 0.980 | 0.992 | 0.993 | 0.991 | 0.979 | 0.991 | 0.993 |
| 350 | 0.998 | 0.998 | 0.996 | 0.994 | 0.992 | 0.993 | 0.993 | 0.992 | 0.991 | 0.992 | 0.993 |
| 300 | 0.998 | 0.998 | 0.997 | 0.995 | 0.994 | 0.994 | 0.994 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.994 |
| 250 | 0.998 | 0.998 | 0.997 | 0.995 | 0.993 | 0.993 | 0.994 | 0.993 | 0.992 | 0.993 | 0.993 |
| 200 | 0.998 | 0.998 | 0.997 | 0.994 | 0.981 | 0.993 | 0.994 | 0.992 | 0.980 | 0.992 | 0.994 |
| 150 | 0.999 | 0.998 | 0.997 | 0.996 | 0.994 | 0.995 | 0.995 | 0.994 | 0.993 | 0.994 | 0.995 |
| 100 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 |
| 50 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.997 | 0.997 | 0.997 |
| 0 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 | 0.998 |
| $y \backslash x$ | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |

Таблица 3

| Значения перетока | | | | | | | | | | | |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 500 | 0.0000 | 0.0024 | 0.0037 | 0.0057 | 0.0072 | 0.0073 | 0.0073 | 0.0078 | 0.0084 | 0.0079 | 0.0075 |
| 150 | 0.0000 | 0.0024 | 0.0039 | 0.0065 | 0.0089 | 0.0082 | 0.0077 | 0.0087 | 0.0101 | 0.0088 | 0.0079 |
| 400 | 0.0000 | 0.0025 | 0.0042 | 0.0077 | 0.0242 | 0.0095 | 0.0081 | 0.0100 | 0.0254 | 0.0101 | 0.0084 |
| 350 | 0.0000 | 0.0024 | 0.0039 | 0.0064 | 0.0088 | 0.0081 | 0.0076 | 0.0086 | 0.0100 | 0.0087 | 0.0078 |
| 300 | 0.0000 | 0.0023 | 0.0036 | 0.0055 | 0.0069 | 0.0071 | 0.0070 | 0.0076 | 0.0081 | 0.0077 | 0.0073 |
| 250 | 0.0000 | 0.0022 | 0.0036 | 0.0061 | 0.0084 | 0.0076 | 0.0071 | 0.0081 | 0.0095 | 0.0082 | 0.0073 |
| 200 | 0.0000 | 0.0020 | 0.0035 | 0.0069 | 0.0232 | 0.0084 | 0.0069 | 0.0088 | 0.0242 | 0.0089 | 0.0072 |
| 150 | 0.0000 | 0.0015 | 0.0027 | 0.0048 | 0.0069 | 0.0061 | 0.0055 | 0.0064 | 0.0077 | 0.0065 | 0.0057 |
| 100 | 0.0000 | 0.0010 | 0.0017 | 0.0027 | 0.0035 | 0.0036 | 0.0036 | 0.0039 | 0.0042 | 0.0039 | 0.0037 |
| 50 | 0.0000 | 0.0006 | 0.0010 | 0.0015 | 0.0020 | 0.0022 | 0.0023 | 0.0024 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0024 |
| 0 | 0.0000 | 0.0024 | 0.0037 | 0.0057 | 0.0072 | 0.0073 | 0.0073 | 0.0078 | 0.0084 | 0.0079 | 0.0075 |
| $y \backslash x$ | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |

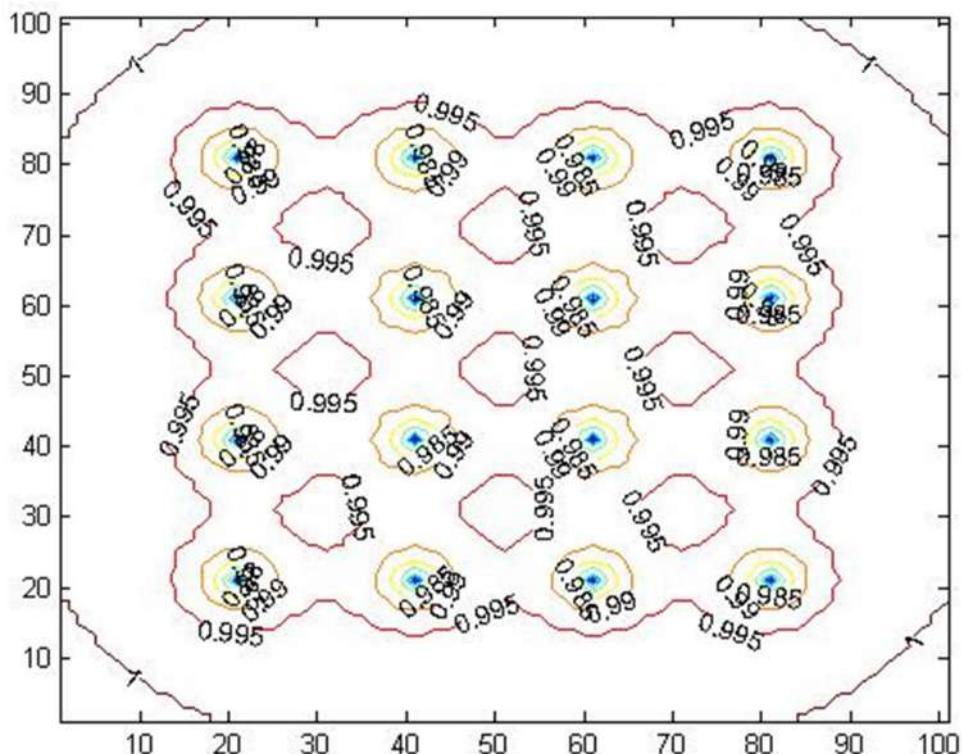


Рис.8. Изобар хорошо проницаемого пласта

Таблица 4

Различные значения коэффициента вязкости по двум моделям

| t сут | $\mu = 2$ | | | | $\mu = 5$ | | | |
|-------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|
| | Промежуточная модель | Модель Хантуша |
| 200 | 0.991 | 0.985 | 0.991 | 0.985 | 0.987 | 0.982 | 0.982 | 0.967 |
| 400 | 0.989 | 0.983 | 0.989 | 0.982 | 0.979 | 0.963 | 0.979 | 0.963 |
| 540 | 0.987 | 0.981 | 0.987 | 0.981 | 0.977 | 0.961 | 0.977 | 0.961 |
| 720 | 0.985 | 0.979 | 0.986 | 0.980 | 0.975 | 0.959 | 0.975 | 0.960 |

Теперь посмотрим, как меняются значения давления вокруг скважин с течением времени. Имея в виду симметричность результатов, рассмотрим одну из соседних точек к скважине при различных значениях коэффициента вязкости (табл. 4) по двум моделям.

Из приведенных значений можно сделать следующие **выводы**. В обеих моделях в рассмотренном примере значения давления почти одинаковы. Поэтому с такими данными целесообразно применять промежуточную модель с использованием малого объема памяти и меньшего времени счета.

Литература

- [1] Коротаев Ю.П., Закиров С.Н. Теория и проектирования разработки газовых и газоконденсатных месторождений. – М.: Недра, 1981. – 294 с.
- [2] Закиров С.Н., Лапук Б.Б. Проектирование и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1974. – 374 с.
- [3] Щелкачев В.Н., Гусейн-заде М.А. Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости // Нефтяное хозяйство. – 1953. – № 2.
- [4] Хантуш М. С. Новое в теории перетекания // Вопросы гидрогеологических расчетов. – М.: Мир, 1964.
- [5] Мухитдинов Н. Газогидродинамическое исследование нелинейной фильтрации жидкости и газа. – Ташкент: Фан, 1977. – 152 с.
- [6] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 455 с.
- [7] Тухманазаров Д.С. Разработка математических моделей фильтрации жидкости в многослойных пластах // Узб.журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2014. – № 3-4.
- [8] Алимов И., Тухманазаров Д.С. Вычислительные алгоритмы для решения двумерных гидродинамических задач с использованием методов прогонки // Узб.журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2013. – № 5-6.

UDC 004.94:532.685

COMPUTER EXPERIMENT TO STUDY OF FILTRATION OIL, GAS AND WATER IN A POROUS MEDIUM

Kurbanov N.M.

staff researcher, Center for the development of software and hardware-program complexes at
Tashkent University of Information Technologies,
tel.: + (99871) 237-62-34, e-mail: nozim_kurbanov@mail.ru

Saliev E.A.

rector, Jizzakh Polytechnical Institute,
tel.: + (8372) 226-46-05, e-mail: e.saliev1956@mail.ru

Accelerating the development of hydrocarbon deposits, improving their technical and economic parameters, maximum extraction of the products of the old oil and gas reservoirs require complex investigations involving mathematical tools. In this paper we consider a mathematical model and software tool designed for the study of the filtration process a mixture of the "oil-gas-water" in a porous medium for concrete practical recommendations and administrative decisions. In the course of the numerical calculations were the main parameters of the process and its change ranges, allowing to determine the operation of the reservoir depending on the length and capacity, also the number of wells and production rates. The suitability of the developed algorithm and program for calculation of fields of pressure and saturation are demonstrated, as well as field development indicators in the "Oil-Gas" systems, the "oil-water", "oil-gas-water". Results of numerical experiments on computer are presented as graphics.

Keywords: computer modeling, numerical method, numerical modeling, porous medium, software tool.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА
ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**
Курбонов Н.М., Салиев Э.А.

Ускорение разработки углеводородных месторождений, повышение их технико-экономических показателей, максимальное извлечение продуктов из старых нефтегазовых залежей требуют проведения комплексных исследований с привлечением математических инструментов. В настоящей работе приведены описания математической модели и программного средства для исследования процесса фильтрации смеси «нефть-газ-вода» в пористой среде с целью принятия конкретных практических рекомендаций и управленических решений. В ходе проведенных численных расчетов установлены основные параметры исследуемого процесса и диапазоны их изменения, позволяющие определять время эксплуатации пласта в зависимости от его длины и мощности, числа скважин и их дебитов. Показана пригодность разработанного алгоритма и программы для расчетов полей давлений и насыщенностей, а также показателей разработки месторождений в системах «нефть-газ», «нефть-вода», «нефть-газ-вода». Результаты проведенных вычислительных экспериментов на ЭВМ представлены в виде графических объектов.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, численный метод, вычислительный эксперимент, пористая среда, флюид, программное средство.

**G'OVAK MUHITDAGI NEFT, GAZ VA SUV FILTRATSIYASI JARAYONI
TADQIQOTI UCHUN HISOB TAJRIBALARI**
Qurbanov N.M., Saliyev E.A.

Uglevodorodli konlarni qayta ishlash, ularning texnik-iqtisodiy ko'rsatkichlarini oshirish hamda eski neft va gaz konlariagi uglevodorolarni maksimal qazib olish matematik apparat yordamida kompleks tadtqiqotlar o'tkazishni talab etadi. Ushbu ishda g'ovak muhitdagi "neft-gaz-suv" aralashmasi filtratsiya jarayonini aniq amaliy takliflar va boshqarishga oid qarorlar qabul qilish maqsadida tadqiq qilish uchun matematik model va dasturiy vositaning tavsiflari keltirilgan. O'tkazilgan sonli hisoblar davomida g'ovak muhitdagi "neft-gaz-suv" aralashmasi filtratsiyasi jarayonining qatlamni ekspluatatsiya qilish vaqtini uning uzunligi, quvvati, quduqlar soni va debitlari miqdoriga bog'liq holda anqliash imkonini beruvchi asosiy parametrlari va ularning o'zgarish oraliqlari anqliandi. Yaratilgan algoritm va dastur bosim va to'yinganlik maydonlarini, bundan tashqari «neft-gaz», «neft-suv», «neft-gaz-suv» tizimlarida konlarni ishslash ko'rsatkichlarini hisoblashga yaroqligi isbotlandi. EHMDa o'tkazilgan hisob tajribalari grafik ob'yektlar ko'rinishida keltirildi.

Tayanch iboralar: kompyuterli modellashtirish, sonli usul, hisob tajribasi, g'ovak muhit, fluid, dasturiy vosita.

1. Introduction

The oil and gas industry is one of the key priority sectors in the economy of oil-producing states. This statement is true in relation to our country with large amounts of natural resources and minerals.

Qualitative development of oil and gas sector and activities related to subsoil use, traditionally associated with the use of computer modeling techniques and a comprehensive study of the object in order to determine the main indicators of oil and gas deposits and management decisions. In this regard, there is an actual problem of developing new and improving existing mathematical models and numerical algorithms for the study of complex processes taking place in a variety of natural and artificial conditions of exposure to mineral deposits.

In this area there are numerous researchers, both in Uzbekistan and abroad, which has already obtained significant results of practical and theoretical nature.

In particular, in [1] created a mathematical model that allows you to get the permeabilities to gas, water and condensate by displacing water and gas condensate, as well as oil, gas and water at a water displacement gas and oil.

The process of oil displacement by water-gas mixture based on the formation of micro bubbles by use of blowing oil properties was considered in [2]. The authors compared the effectiveness of various technologies and injection water-gas mixture is obtained the optimum ratio of water and gas in the mixture, which allows you to reach the maximum oil displacement compared to standard methods.

In [3] the possibility of reducing the dimension of the problem of the three-phase filtration in layered formations studied by the introduction of modified (fictitious) instead of the original permeability relative permeability, which are the coefficients of the original system of equations in the model Muskat-Mures.

The paper [4] is devoted to the development of a mathematical model of the flow of weakly compressible fluid in a porous medium, constructed by analogy with the quasi gas dynamic equations. The model is generalized for the case of three-phase fluid and supplemented by the equation of conservation of energy, which allows its use in modeling perspective of thermal methods of oil production.

In [5] with the help of numerical simulation of multiphase flow processes in porous media studied typical situations related to the presence of fractured zones in inter-well space. Based on the results of numerical experiments the authors found that in the presence of fracture flooding in inter-well space are usually accelerates water breakthrough, reducing oil recovery, but in situations where the fractured zone change connectivity, oil production could increase.

Simulation of unsteady flow of multiphase flow - "oil-gas-water" in the reservoir and the well when the pump is considered in [6]. The authors take for a single phase in the formation, and take into account the relative motion of the components of the multiphase medium, heat and mass transfer and flow regime. The authors are

examples of the use of models to illustrate the transient effects that occur in the process of oil production.

In [7] investigated numerically solved the problem of one-dimensional three-phase filtration in a heterogeneous formation, taking into account the solubility of gas in the oil and aqueous phases, and phase compressibility of the porous medium, and the force of gravity.

In [8] the transfer task considered porous media in the three-phase mixture "water-oil-gas" in the case where the water contains a finely dispersed gas phase in the form of micro- or nano-bubbles. It is assumed that the transfer of bubbles is mainly determined by the flow of the dispersed phase (water). These large concentrations of gas phase in the pore space, as well as water and oil carried in accordance with the modified Darcy law for multiphase mixtures. The authors constructed a mathematical model of motion of the mixture, when the main phase (water, gas, oil) are subject to filtering equations and the fine gas phase is described by the Boltzmann equation type.

Analysis of the above sources and other scientific papers showed that in studies hardly be considered a process of bilateral displacement gas and oil by water, resulting in the formation of pure gas zone, a mixture of the "oil-gas-water" and clean oil. In this paper, efforts have been made to fill this gap.

2. Formulation of the problem

Using the laws of fluid physics, it is possible to formulate a mathematical model of the process of stimulation and promotion of the volume of gas in the fluid reservoir, which is reduced to the solution of the following system of nonlinear differential equations with appropriate initial and boundary conditions [9-11]: when

$$0 < x < \frac{l(\tau)}{L},$$

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{K \rho_h R T Z \mu_r}{K_r P_h \mu_h P} \frac{\partial P^2}{\partial \tau} \quad (1)$$

when

$$\frac{l(\tau)}{L} < x < 1,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (P S_r) + B \frac{\partial}{\partial \tau} (S_h + B_{bh} + S_b), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\partial S_h}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_b \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\mu_b}{\mu_h} \frac{\partial S_b}{\partial \tau}, \\ S_h + S_b + S_r = 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$P(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial P^2}{\partial x} \right|_{x=0} = -\alpha \frac{L}{P_h} q_r,$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_i+0} - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_i-0} = \beta \frac{L}{P_h} q_k, \quad (4)$$

$$\frac{K_{\Gamma}P_{\text{H}}}{2\rho_{\Gamma}RTZ} \frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}-0} = K \left(\frac{\rho_{\text{H}}K_{\text{H}}}{\mu_{\text{H}}} + \frac{\rho_{\text{B}}K_{\text{B}}}{\mu_{\text{B}}} + \frac{K_{\Gamma}P_{\text{H}}P}{RTZ\mu_{\Gamma}} \right) \frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (5)$$

$$\frac{dl}{d\tau} = -K \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (6)$$

$$P_{\Gamma} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}-0} = P_{\text{H}} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} P(x, 0) &= P_{\text{H}}, S_{\text{H}}(x, 0) = S_{\text{H}}^0, S_{\Gamma}(x, 0) = S_{\Gamma}^0, \\ S_{\text{B}}(x, 0) &= S_{\text{B}}^0, l(0) = l^0, 0 < x < 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

The following notation (7) - in the equations (1): $P(x, \tau)$ - pressure; S_{Γ} , S_{H} , S_{B} - the saturation of gas species, oil and water; K - The absolute rock permeability; K_{Γ} , K_{H} , K_{B} , μ_{Γ} , μ_{H} , μ_{B} - Respectively permeability and gas viscosity, oil and water; $P(x, 0) = P_{\text{H}}$, $S_{\Gamma}(x, 0) = S_{\Gamma}^0$, $S_{\text{H}}(x, 0) = S_{\text{H}}^0$, $S_{\text{B}}(x, 0) = S_{\text{B}}^0$ - The initial pressure distribution, gas saturation, oil saturation and water saturation; ρ_{Γ} , ρ_{H} , ρ_{B} - Density of the gas, oil and water; R - The gas constant; T - The absolute temperature; Z - Gas constant.

compressibility; P_{H} - The initial reservoir pressure; m - Porosity of the formation; ζ_i - Internal singular point (injection and / or production wells); $x = l(\tau)$ - Border section; L - The length of the reservoir; q_{Γ} , q_{H} - Respectively, the intensity of injection and production wells; α , β - Some constants for driving dimension.

3. The method of solving and discussion of the results

From the statement of the problem (1) - (7), it is difficult to obtain an analytical solution. Therefore, for the numerical solution of the problem it was developed computational algorithm based on the application of the basic ideas of the method of straightening phase fronts and integral-interpolation method to build a conservative difference scheme, which in turn is solved by the sweep method at each site [9-11].

On the basis of this algorithm software to analyze the dynamic state of the object based on the joint motion of a three-phase medium have been developed for different operating conditions of the reservoir system.

The structure of this software includes modules: control (fig. 1), entering the input data (fig. 2), the analysis and interpretation of results (fig. 3-4).

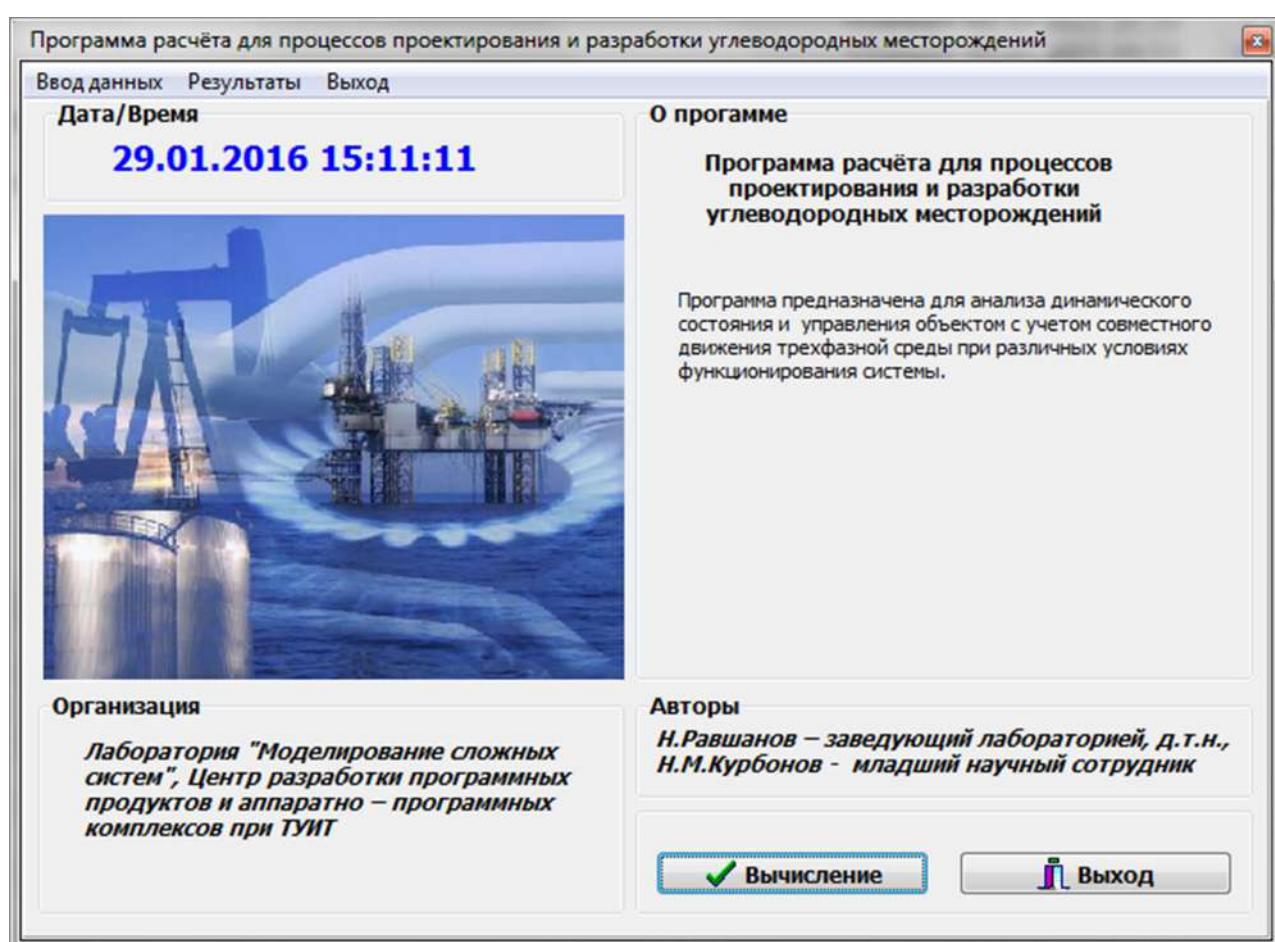


Fig 1. The main program window

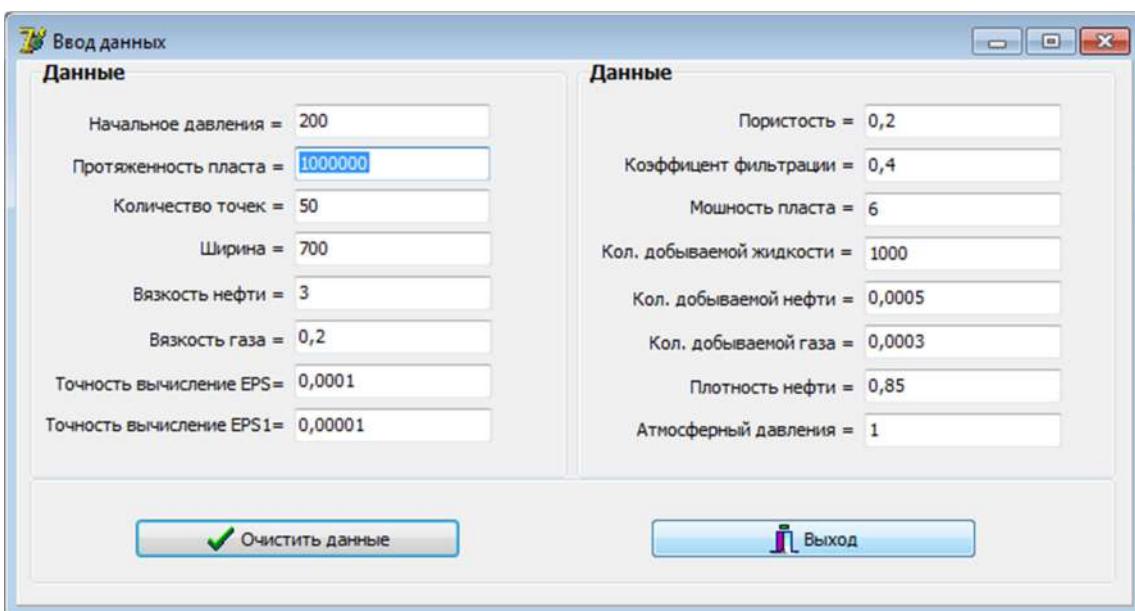


Fig.2. Data entry window

The program involved the interface mode in order to maximize ease of human-computer interaction.

To analyze and study the process of filtering the "oil-gas-water" in porous media, the definition of its basic parameters and the range of their changes on a computer experiments were carried out (fig. 3-4).

Computational experiments were carried out under the following input data: the length of the reservoir $L = 30 \text{ km}$; capacity $B = 6 \text{ m}$; width $H = 700 \text{ m}$; oil

viscosity $\mu_{\text{н}} = 4 \text{ cP}$; number of produced fluid $q_m = 1000 \text{ tons / day}$; $m = 0,2$; $K = 0,4 \text{ darcy}$; $\mu_{\Gamma} = 0,2 \text{ sP}$; $P_{\text{н}} = 200 \text{ at}$; $\rho_{\text{н}} = 0,85 \text{ g/sm}^3$; $R = 8,31 \text{ J/(mole}\cdot\text{K)}$; $T = 273 \text{ K}$; $Z = 40$; $N = 50$; $\varepsilon = 0,0001$.

The results of computational experiments and their analysis are given in [9-11], and in fig. 5-10.

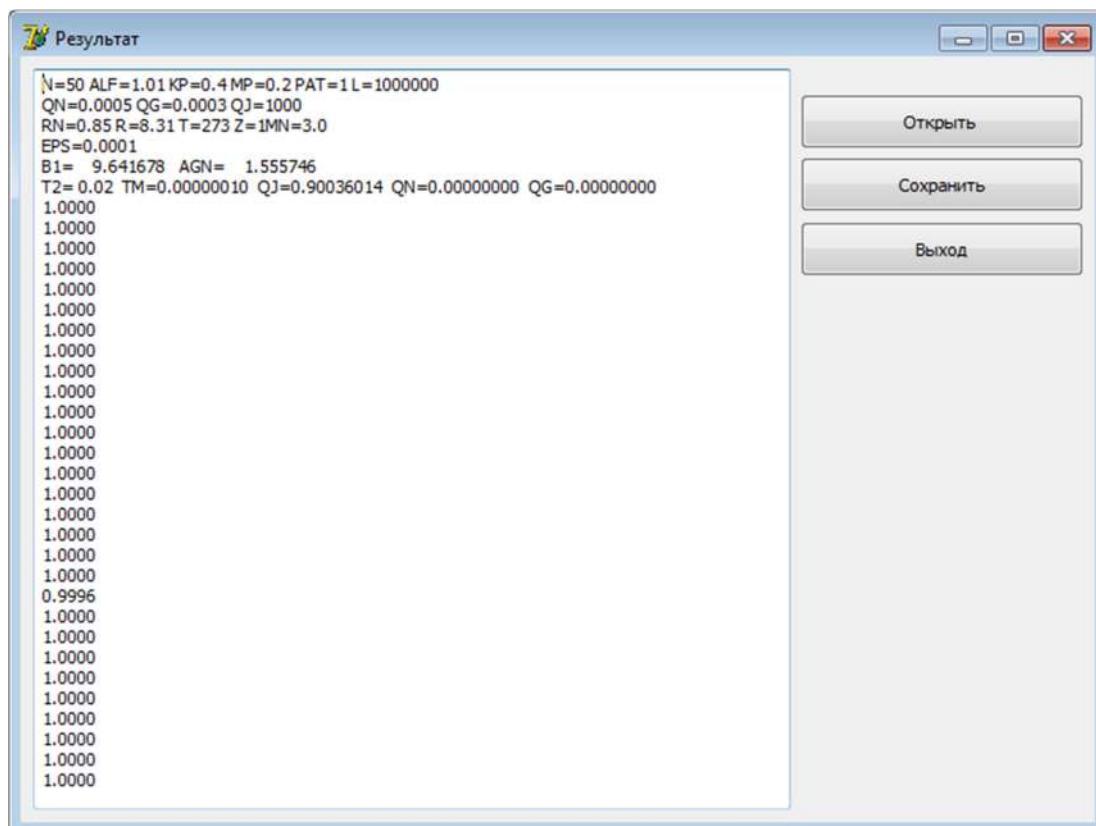


Fig.3. Output window results in text mode

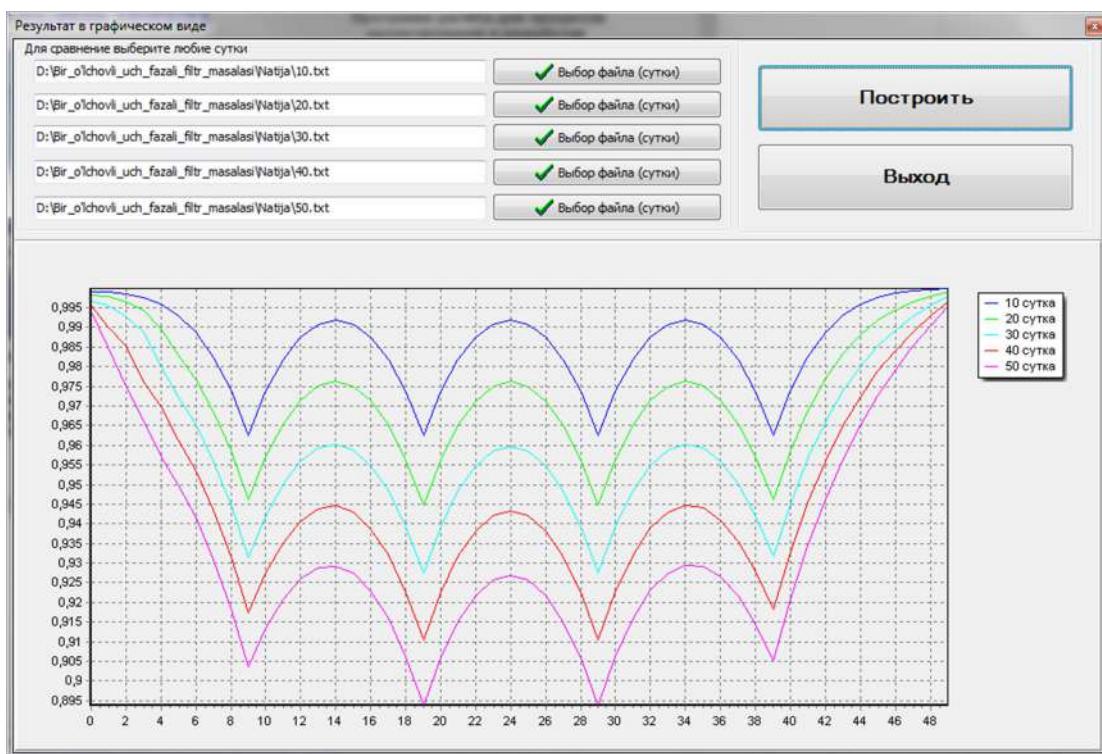
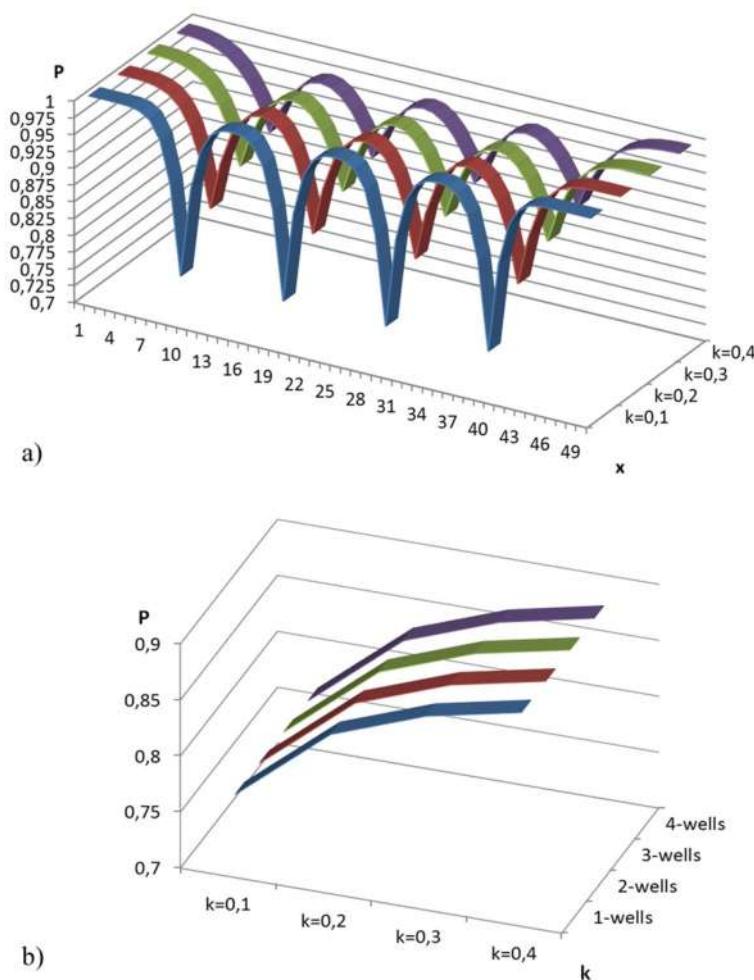


Fig.4. Output window results in graphical mode

Fig.5. Dynamics of pressure redistribution in the reservoir when different values of filtration coefficient ($\tau = 100$ days)

Numerical calculations showed that the significant parameters affecting gas filtration process, water and oil in the reservoir system is the filtration coefficient and structure of porous rocks (see. fig.5). At small coefficient of filtration can be observed decrease in the intensity of the fluid flow around the well. This leads to

a sharp drop in pressure around the wellbore by slowing the speed of liquid filtration through porous media.

Fig. 6a, 6b shows the results of numerical calculation on a computer - the differential pressure change in the reservoir at the 4 wells. From fig. 6 that selection occurs within the fluid filtration. There is a symmetrical differential pressure with respect to the location of wells.

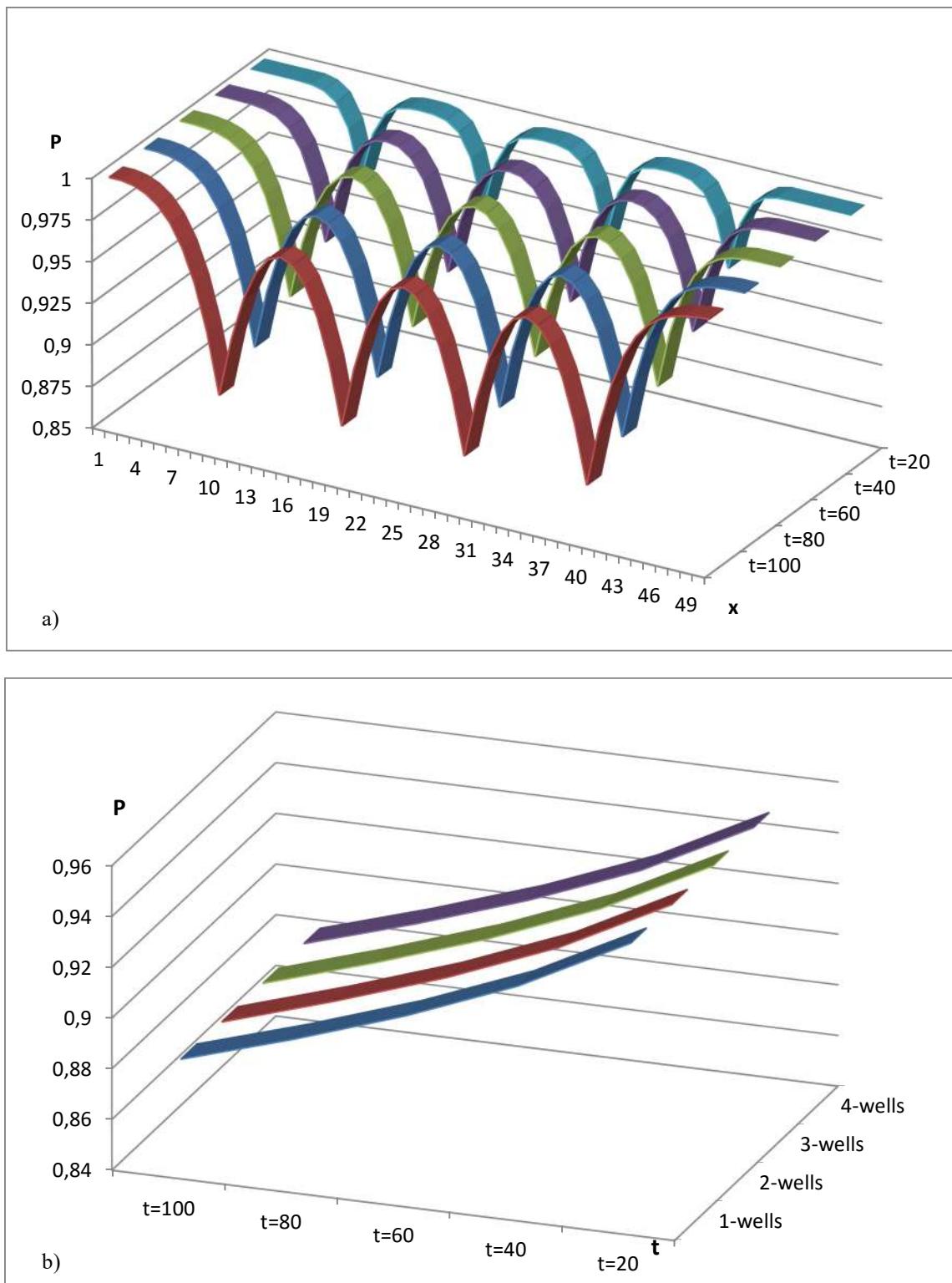


Fig.6. Redistribution of pressure in the reservoir (in days) at the four well

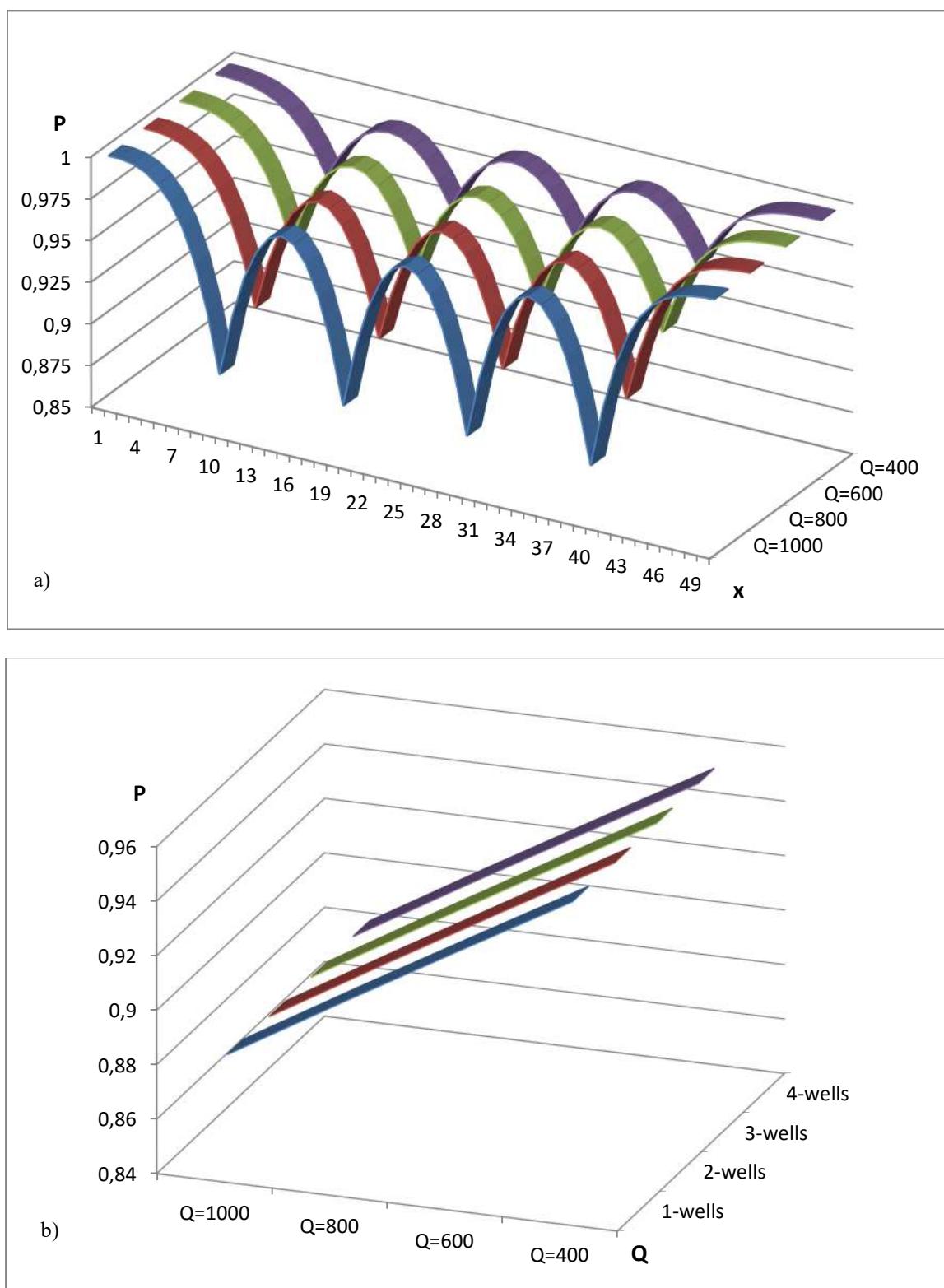


Fig. 7. Redistribution pressure in the formation at various values of the flow rates in wells (days)

Computational experiments were carried out for different values of flow rates. As follows from the curves in fig. 7, the pressure in the filtration area is reduced proportionally, depending on the growth of well production rates.

Changes in pressure and saturation fields in time and space depend on the hydrodynamic parameters of the object. Analysis of the numerical calculations showed that the dynamics of the formation of pressure

redistribution depends essentially on the capacity and location of the wells in the filtration reservoir. With the increase in capacity of the reservoir and the well pressure decreases neighboring points. As follows from the analysis of numerical calculations on a computer, while the producing formation operation (see. fig. 8) essentially depends on its length, capacity, number of wells and their production rates.

The results of numerical calculations for different values of the coefficient of viscosity of oil are shown in fig. 9. From the calculations follows that with increasing

oil viscosity pressure around the well is reduced proportionally (fig. 9). This is especially true for large capacity filtration layer (fig. 10).

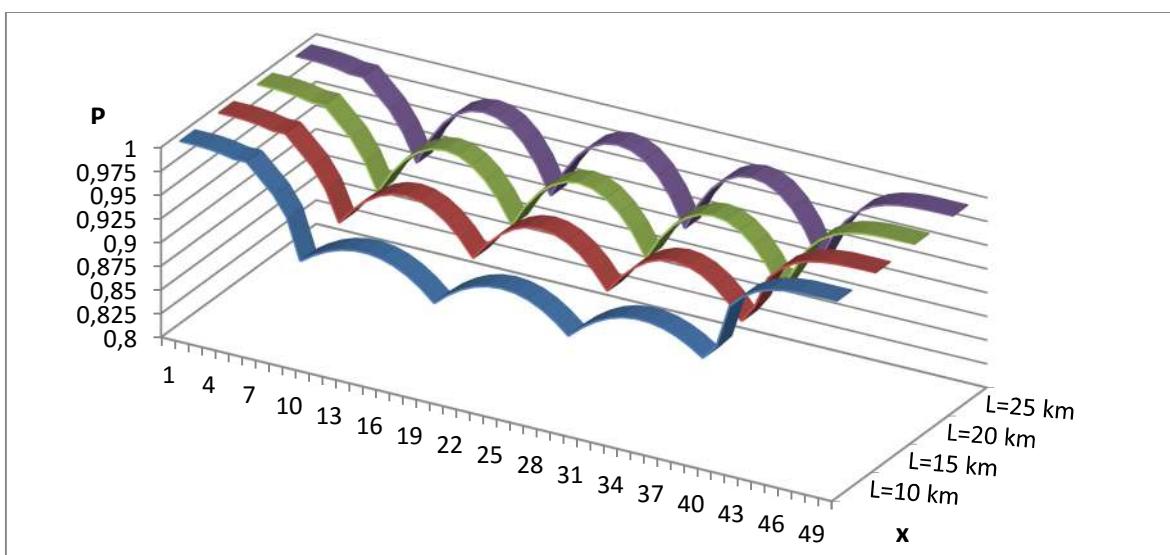


Fig.8. The redistribution of pressure in the formation at various values reservoir length ($\tau = 50$ days)

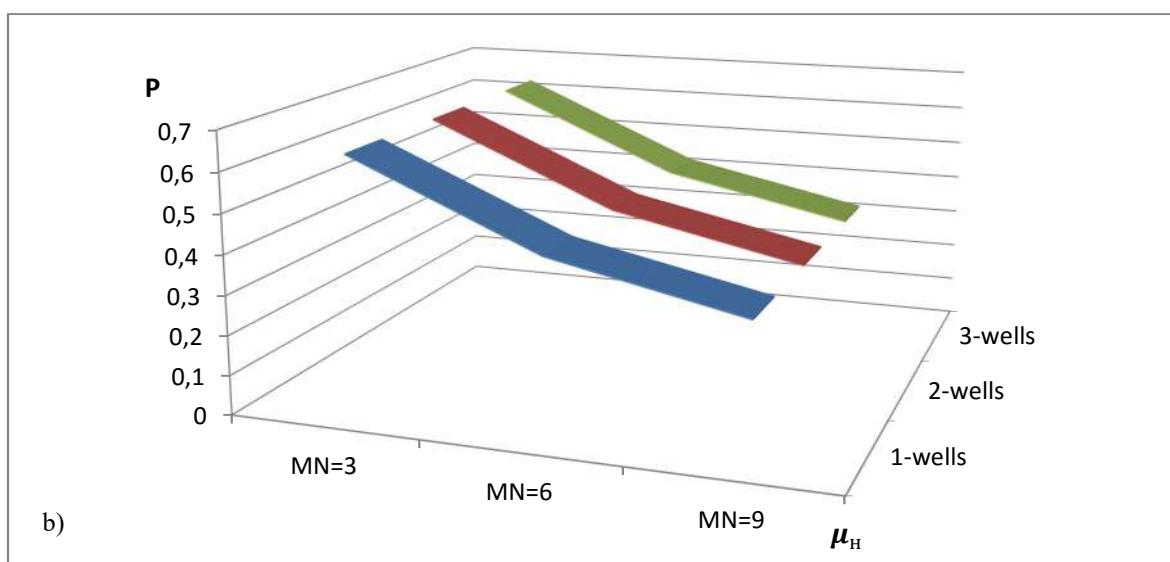
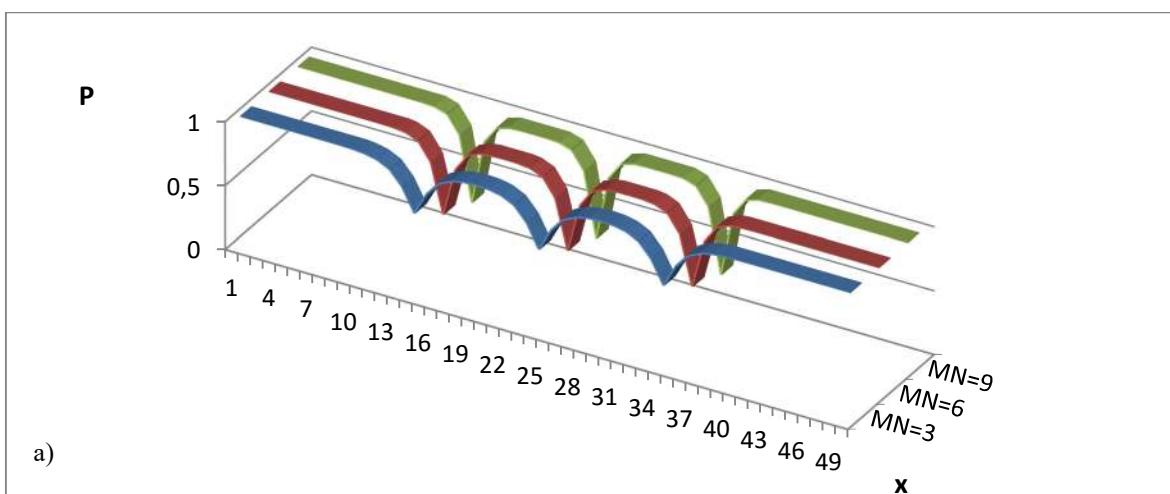


Fig.9. Redistribution pressure in the reservoir at different oil viscosity value (days)

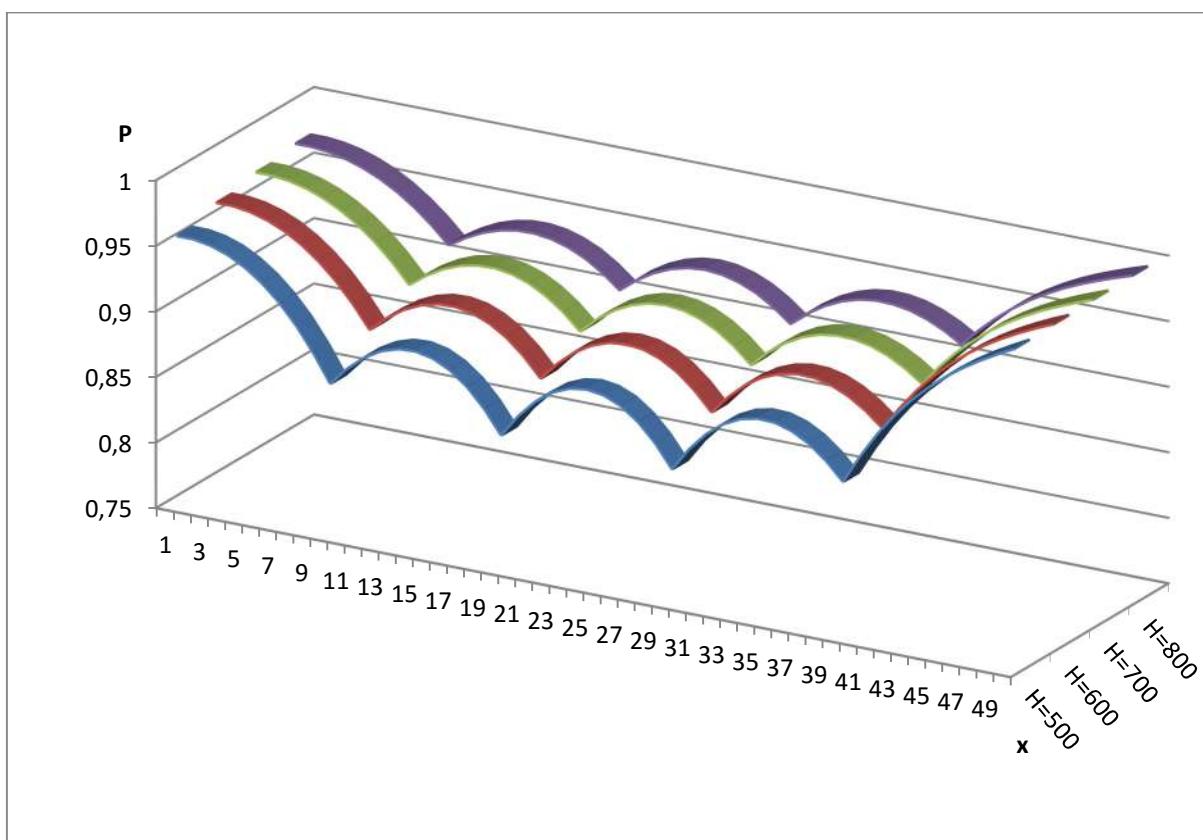


Fig.10. Redistribution of pressure in the reservoir at different Seam width values (days)

4. Conclusions

Computational experiments determined the basic parameters of the filtration process, a mixture of the "oil-gas-water" in a porous medium and ranges of change that can be used for the purpose of design and development of hydrocarbon deposits under unsteady filtration of fluids in porous media.

The numerical calculations on a computer installed in the operation of the reservoir, depending on the length and capacity of the reservoir, the number of wells and their production rates.

Analysis of the results of computational experiments with a wide variation of filtration parameters for a

variety of test problems, showing the adequacy of the constructed mathematical models, convergence and stability of computational algorithms built.

The results confirm the suitability of algorithms and programs for calculation of fields of pressure and saturation, as well as field development indicators in the "Oil-Gas" systems, the "oil-water", "oil-gas-water."

The developed mathematical model, computational algorithm and software tool can be used to analyze the functioning of operational management and forecasting the development of oil and gas fields under various conditions of the stimulation and the adoption of specific recommendations for action.

References

- [1] Lozhkyn M.G. Model relative permeabilities to displace gas condensate and water and oil displacement by water and gas // Exposition gas oil. – Naberezhnye Chelny, 2015. – № 1 (40). – Pp. 39-41.
- [2] Kutrunov V.N., Padin E.A. The mathematical model of the process of oil displacement by water-gas mixture // Bulletin of Tyumen State University. Physical and mathematical modeling. Oil, gas and energy. – 2015. – Vol. 1. – № 2 (2). – Pp. 163-172.
- [3] Bogomolov V.A., Bulgakov O.R., Plohotnikov D.S., Plohotnikov S.P. Mathematical modeling of a three-phase filtration in layered strata based jet scheme // Journal of Engineering Physics. – 2011. – Vol. 84. – № 5. – Pp. 907-911.
- [4] Trapeznikova M.A., Churbanova N.G., Lupa A.A. Three-phase fluid flow simulation in porous media, taking into account the thermal effects // Mathematica Montisnigri. – 2015. – Vol. 33. – Pp. 105-115.
- [5] Zaslavsky M.Yu., Tomin P.Y. On the modeling of multiphase flow processes in fractured media as applied to the field model adaptation problems : Preprint of the Institute of Applied Mathematics. – M., 2010. – № 45. – 20 p.
- [6] Topolnikov A.S., Bolotnova A.D., Sambucus V.A., Agishev U.O. Mathematical modeling of dynamic processes in the oil well // Problems of modern science and practice. – 2014. – № 4 (54). – Pp. 112-118.

- [7] *Shalimov B.V.* About three-phase fluid filtration (model Buckler-Leverett) // Fluid Mechanics. – 1972. – № 1. – Pp. 39-44.
- [8] *Dem'yanov A.Y., Dinariev O., Ivanov E.N.* Simulation of the water transfer from the gas phase in the fine porous media // Journal of Engineering Physics. – 2012. – Vol. 85. – № 6. – Pp. 1145-1154.
- [9] *Ravshanov N., Kurbanov N.M.* Computer modeling of the filtration process of fluids in porous media // Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Informatics. – Chelyabinsk, 2015. – Vol. 4. – № 2. – Pp. 89-106.
- [10] *Qurbanov N.M.* G'ovak muhitdag'i murakkab tarkibli aralashmaning filtering zharaenini tadqiq etish uchun model va hisoblash experiment // Informatics wa energy muammolari magazine. – Toshkent, 2014. – № 3-4. – B. 55-61.
- [11] *Kurbanov N.M.* Computer modeling of the process of oil and gas fields development // Researches of technical sciences. – Moscow: Publishing house INGN, 2015. – № 2 (16). - Pp. 20-26.

УДК 531+537.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Нуралиев Ф.М.

к.ф.-м.н., проректор Ташкентского университета информационных технологий,
тел.: +(99871) 238-65-28, e-mail: f.nuraliev@tuit.uz

Основные уравнения теории магнитоупругости тонких пластин и оболочек выводятся на основании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. При этом используются геометрические соотношения Коши и физические соотношения, в обратной форме закона Гука, а также закон изменения перемещений, объемные силы электромагнитного происхождения, добавляемые к полным объемным силам. Для решения поставленной задачи колебания магнитоупругих пластин и пологих тонких оболочек применяется вариационный метод Бубнова-Галеркина. При построении последовательности координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, использован структурный метод R-функций В.Л.Рвачева. При расчетах в качестве примера взята медная пластина, имеющая круглую форму с двумя круговыми вырезами, находящаяся под действием электромагнитного поля и равномерно распределенной нагрузки. Исследована сходимость вычислительного алгоритма расчета относительно количества координатных функций структуры решений.

Ключевые слова: математические модели, магнитоупругость, метод R-функций (RFM), оболочки, пластины, сложная конструкционная форма.

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES OF THE ELECTROMAGNETIC FIELDS' EFFECTS ON DEFORMATIONAL CONDITION OF THIN CONDUCTIVE BODIES BY THE METHOD OF R-FUNCTION

Nuraliev F.M.

The basic equations of the theory of magneto-elastic thin plates and shells are created based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradskiy. It uses geometric relationships Cauchy and physical relationships in the reverse form of Hooke's law, and the law of variation movements, volume forces of electro-magnetic form, adds to the overall body forces. Variational method Bubnov-Galerkin is used to solve the problem of magneto-elastic vibrations of plates and shallow thin shells. In the construction of a sequence of coordinate functions, satisfying the given boundary conditions, structural method of R-functions by V.L.Rvachev is used. In the calculations is taken as an example of a thin plate having a circular shape with two circular cut-outs, which is under the influence of an electro-magnetic field and a uniformly distributed force. The convergence of computing algorithm was studied with respect to the number of coordinate functions making structures.

Keywords: mathematical models, magneto elasticity, R-functions method (RFM), shells, plates, complex structural form.

ELEKTROMAGNIT MAYDONLARNING YUPQA ELEKTR O'TKAZUVCHAN JISMLARNING DEFORMATSION HOLATIGA TA'SIR ETISH JARAYONLARINI R-FUNKSIYA USULIDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH Nuraliyev F.M.

Gamilton-Ostrogradskiy variatsion tamoyili asosida yupqa plastina va qobiqlarning magnitelastiklik nazariyasi asosiy tenglamalari chiqariladi. Bu yerda Koshi geometrik munosabatlari, Guк qonunining teskari ko'rinishidagi fizik munosabatlar, hamda ko'chishlarni ozgarish qonuni, to'liq hajmiy kuchlarga qo'shiluvchi elektromagnit hajmiy kuchlar foydalanilgan. Qo'yilgan magnitelastik plastina va qobiqlarni tebranish masalalarini yechish uchun Bubnov-Galyorkin variatsion usuli qo'llaniladi. Berilgan chegaraviy shartlarni qoniqtiruvchi, V.L.Rvachovning R-funksiya tuzilmaviy usuli yordamida koordinat funksiyalar ketma-ketliklari qurilgan. Hisob-kitoblarda misol sifatida elekrtomagnit maydon va teng taqsimlangan kuchlar ta'sirida joylashgan misli ikkita aylana kesimlarga ega aylana shaklli plastina ko'rilgan. Qurilgan koordinat funksiyalar soniga nisbatan hisob-kitob algoritmining yaqinlashishi tadqiqot qilingan.

Tayanch iboralar: matematik model, magnitelastiklik, R-funksiya usuli (RFM), plastina, qobiq, murakkab konstruksiyon shakl.

1. Введение

Основные тенденции развития современной электронно-вычислительной и радиоэлектронной аппаратуры приводят к усилению влияния электромагнитных эффектов, т.е. влияние электромагнитного поля на напряженно-деформированное состояние упругой среды и наоборот. Учет электромагнитных эффектов при разработке такого рода устройств является сложной проблемой, требующей соответствующего научного обоснования в процессе проектирования конструкций и при проведении предпроектных исследований.

По причине невозможности применения аналитических подходов и неэффективности существующих численных методов решение задач в теории электропроводных тел сложной формы в теории и на практике остается проблемным. Исследования для решения этих проблем в свою очередь стимулируют разработку аналитических и прежде всего численных методов, с целью проведения расчета на компьютере, и их развитие. При решении этих задач методология математического моделирования имеет особое значение – это частичная автоматизация процесса научного исследования, т.е. дает возможность получения численных, визуализированных решений путем построения и изучения математической модели объекта, разработки вычислительных алгоритмов для их исследования, разработки соответствующего программного обеспечения. По этой причине адекватное математическое моделирование процессов влияния электромагнитных полей на тонкие электропроводные тела сложной формой весьма актуально.

2. Постановка задачи магнитоупругости тонких пластин и оболочек

Основные уравнения теории магнитоупругости тонких пластин и оболочек выводятся на основании вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. При построении конкретных моделей используются геометрические соотношения Коши и физические соотношения, в обратной форме закона Гука, а также закон изменения перемещений. При выводе уравнения используется прямоугольная система координат.

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского записывается в следующем виде [1-3]:

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0, \quad (1)$$

где T – кинетическая и Π – потенциальная энергии; A – работа внешних сил.

Теория оболочек (пластин) основана на геометрической гипотезе, согласно которой нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к этой поверхности в ее деформированном состоянии

и сохраняет свою длину. Данная гипотеза (Кирхгофа-Лява) допускает, что деформация оболочки происходит без деформации сдвига и в плоскостях нормальных сечений и без деформации удлинения по толщине оболочки.

Аналитически гипотезу Кирхгофа-Лява можно записать в виде [4-10]:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1+k_1 z)u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ u_2 &= (1+k_2 z)v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ u_3 &= w. \end{aligned} \quad (2)$$

где u_1, u_2, u_3 – перемещения в произвольной точке оболочки (пластины); u, v, w – перемещения срединной поверхности оболочки (пластины); k_1, k_2 – главные кривизны срединной поверхности; $k_1=1/R_1, k_2=1/R_2$; здесь R_1, R_2 – главные радиусы кривизны. В случае пластин $k_1=k_2=0$.

Полученные выражения вариации кинетической, потенциальной энергии и работы внешних сил подставляем в вариационный принцип Гамильтона-Остроградского (1). Полученное вариационное уравнение существует при любом значении объема V . В силу произвольности области V , после проведения соответствующих аналитических выкладок дифференцирования, интегрирования по частям и приведения подобных членов, получаем уравнения движения и естественные начальные и граничные условия оболочки (пластины) [11]:

$$\begin{aligned} -\rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + (k_1 - k_2) \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \\ + N_x + R_x + q_x + T_{zx} = 0, \\ -\rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} + (k_1 - k_2) \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \\ + N_y + R_y + q_y + T_{zy} = 0, \\ -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \\ + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + k_1^2 M_{22} + Q_z + R_z - \\ - \frac{\partial}{\partial x} (M_x - M_{Rx}) - \frac{\partial}{\partial y} (M_y - M_{Ry}) + q_z + T_{zz} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (M_{qx}^+ + M_{qx}^- + M_{Txz}^+ + M_{Txz}^-) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (M_{qy}^+ + M_{qy}^- + M_{Tzy}^+ + M_{Tzy}^-) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом некоторые члены уравнения, в частности, отброшены в силу их незначительного влияния.

Естественные граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} (-N_{11} + N_{Px} + N_{Txz}) \delta U \Big|_x &= 0, \\ (-N_{12} + N_{Py} + N_{Txy}) \delta V \Big|_x &= 0, \\ \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + Q_{Pz} + Q_{Txz} - \right. \\ \left. - M_{qx}^- - M_{qy}^- - M_{Txz}^+ - M_{Tzy}^- \right) \delta W \Big|_x &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (M_{11} - M_{Px} - M_{Txz}) \delta \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_x = 0, \\
 & (-M_{12} - M_{Py} - M_{Txy}) \delta \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_x = 0, \\
 & (-N_{12} + N_{Fy} + N_{Txy}) \delta U \Big|_y = 0, \\
 & (-N_{22} + N_{Fy} + N_{Txy}) \delta V \Big|_y = 0, \\
 & \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + Q_{Fz} + Q_{Tyz} - \right. \\
 & \quad \left. - M_{qy}^- - M_{qy}^+ - M_{Tzy}^+ - M_{Tzy}^- \right) \delta W \Big|_y = 0, \\
 & (M_{12} - M_{Fx} - M_{Tyx}) \delta \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_y = 0, \\
 & (M_{22} - M_{Fy} - M_{Tyy}) \delta \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_y = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, (3) есть уравнение движения и (4) - граничные условия, налагаемые на весьма пологую оболочку, полученные на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского при использовании гипотезы Кирхгофа-Лява.

В такой постановке объемные силы электромагнитного происхождения, добавляемые к полным объемным силам, представляются в виде [4-7]:

$$f = \rho K = \frac{1}{4\pi} (\text{rot}(\text{rot}(U \times H))) \times H, \tag{5}$$

где $U(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещений; $H(H_x, H_y, H_z)$ – вектор напряженности магнитного поля.

К полной поверхностной и контурной (граничной) силам добавляются электродинамические тензоры напряжений Максвелла:

$$\begin{aligned}
 T_{ik} &= \frac{1}{4\pi} [H_i h_k + h_i H_k] - \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \vec{h} \vec{H}, \\
 T_{ik}^e &= \frac{1}{4\mu\pi} [H_i^e h_k^e + h_i^e H_k^e] - \frac{\delta_{ik}}{4\pi} \vec{h}^e \vec{H}^e,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$

Соотношения (3) и (4) с учетом (5) и (6) определяют математические модели магнитоупругости тонких пластин и оболочек.

3. Вычислительный алгоритм расчета магнитоупругости тонких пластин и оболочек со сложной формой методом RFM

Для решения поставленной задачи колебания магнитоупругих пластин и пологих тонких оболочек применяем вариационный метод Бубнова-Галеркина. Как известно, при этом процесс решения задачи состоит из следующих этапов [12, 13]:

- построение последовательности координатных функций (структур решений), удовлетворяющих

заданным граничным условиям при сложной конструкционной конфигурации оболочек (пластин);

- дискретизация по пространственным переменным, построение разрешающих уравнений, т.е. построение дискретной модели;

- решение разрешающих уравнений и нахождение неизвестных компонент структуры решений;

- определение неизвестных функций, в нашем случае тангенциальных и нормального перемещения срединной поверхности оболочки.

На первом этапе при построении последовательности координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям, использован структурный метод R-функций В.Л.Рвачева [8-10]. Отметим, что структурный метод R-функций (RFM) строит последовательность координатных функций в виде структуры решений, удовлетворяющих граничным условиям при практически произвольной сложной конфигурации контура оболочек (пластин).

В общем случае структуру решений, построенную методом RFM, можно представить в виде

$$u = u(\omega, \Phi_1), \quad v = v(\omega, \Phi_2), \quad w = w(\omega, \Phi_3), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \sum_{i=1}^{N_1} c_i(t) \phi_i(x, y), \\
 \Phi_2 &= \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} c_i(t) \varphi_i(x, y), \\
 \Phi_3 &= \sum_{i=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} c_i(t) f_i(x, y).
 \end{aligned}$$

Тогда искомые функции (u , v и w) можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{N_1} c_i(t) u_i(\omega, x, y), \\
 v &= \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} c_i(t) v_i(\omega, x, y), \\
 w &= \sum_{i=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} c_i(t) w_i(\omega, x, y).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь ω – нормализованное уравнение границы области оболочки; ϕ_i , φ_i и f_i – некоторые полные (базисные) системы функций (степенной, Чебышева, тригонометрические полиномы и т.п.); c_i – неопределенные компоненты структуры решений, подлежащие определению.

Подставляя структуры решений в уравнения (7), (8) и проведя процедуру дискретизации по пространственным переменным x и y , получаем разрешающее уравнение (дискретную модель) для нахождения неопределенных компонент структуры решений.

В случае динамики разрешающее уравнение представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ):

$$A \ddot{C} + BC = F \tag{9}$$

с начальными условиями

$$C|_{t=t_0} = C_0, \dot{C}|_{t=t_0} = \dot{C}_0. \quad (10)$$

В случае статики разрешающее уравнение представляется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$BC = F. \quad (11)$$

Для решения разрешающих уравнений можно использовать известные численные методы алгебры и анализа, в частности, для решения СОДУ (9)-(10) – метод Ньюмарка, прямого интегрирования, а для решения СЛАУ (11) – метод исключения Гаусса. При этом вычисление определенных интегралов, представляющих компоненты для матриц массы и жесткости, а также компонент вектора правой части, вполне применим численный метод вычисления двукратных интегралов Гаусса.

4. Вычислительный эксперимент по расчету статики и динамики магнитоупругости тонких пластин со сложной формой методом RFM

В качестве примера возьмем медную пластину, имеющую круглую форму с двумя круговыми вырезами, находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки q . Структура решений для граничного условия: жестко защемленный край -

$$u = \omega\Phi_1, \quad v = \omega\Phi_2, \quad w = \omega^2\Phi_3. \quad (12)$$

Здесь $\omega = F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$.

Логические функции для опорных областей F_1 , F_2 и F_3 представляем в виде

$$F_1 = R^2 - x^2 - y^2 \geq 0;$$

$$F_2 = (x-a)^2 + y^2 - r^2 \geq 0;$$

$$F_3 = (x+a)^2 + y^2 - r^2 \geq 0,$$

где R – радиус круглой пластины, r – радиус кругового выреза пластины с центрами в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$.

Рассмотрим задачу изгиба ($u=v=0$) магнитоупругой пластины, находящуюся в магнитном поле с заданным вектором напряженности магнитного поля $H(H_x, H_y, H_z)$. Уравнение состояния в безразмерных координатах данной пластины, в силу (3), имеет вид

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + k_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + k_4 \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \\ + k_5 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + k_6 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_7 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + k_8 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = q, \end{aligned}$$

где

$$k_1 = 1 + \frac{I(H_y^2 + H_z^2)}{4\pi D}; \quad k_2 = -2 + \frac{IjH_xH_y}{4\pi D};$$

$$k_3 = 2j^2 + \frac{I_*j^2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)}{4\pi D};$$

$$k_4 = -2 + \frac{Ij^3H_xH_y}{4\pi D};$$

$$\begin{aligned} k_5 = j^4 + \frac{Ij^4(H_x^2 + H_z^2)}{4\pi D}; \quad k_6 = -\frac{ha^2(H_y^2 - H_x^2)}{4\pi D}; \\ k_7 = -\frac{4hja^2H_xH_y}{4\pi D}; \quad k_8 = \frac{hj^2a^2(H_y^2 - H_x^2)}{4\pi D}. \end{aligned}$$

При расчете принимаем следующие входные механические и геометрические параметры: $H_x = H_y = H_z = 10 \text{ кЭ}$, ($I \text{ Э} = 1 \text{ кг}^{1/2}/(\text{м}^{1/2}\text{сек})$); $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ – плотность материала пластины; $h = 10^{-2} \text{ м}$ – толщина пластины; $q = \frac{a^4Q_3}{Dh} = 1$ – нагрузка, действующая на пластину; $E = 10^{11} \text{ Н}/\text{м}^2$ – модуль упругости; $v = 0,3$ – коэффициент Пуассона; $R = 1 \text{ м}$; $r = 0,2 \text{ м}$; $a = 0,5 \text{ м}$.

В качестве базисного полинома, входящего в структуру решения (12), возьмем степенной полином.

На рис. 1-4 приведены графики изменения прогиба W относительно степени полинома (nk) и числа узлов Гаусса ($clutoch$) по сечениям OX и OY . На рис. 1 и 2 приведены графики изменения прогиба по сечению OX , при $clutoch=20$, а nk изменяется от 2 до 4 и при $nk=3$, а $clutoch$ принимает 20 и 32, соответственно. На рис. 3 и 4 при тех же значениях nk и $clutoch$ соответственно по сечению OY .

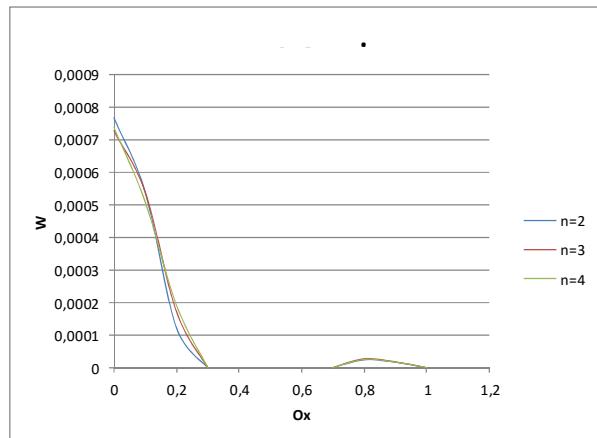


Рис. 1. Прогиб по оси Ox

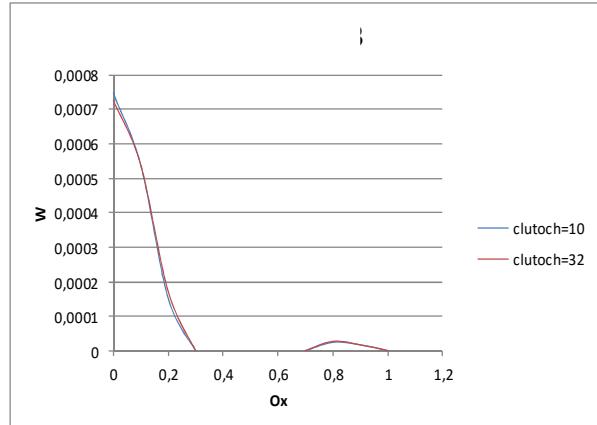
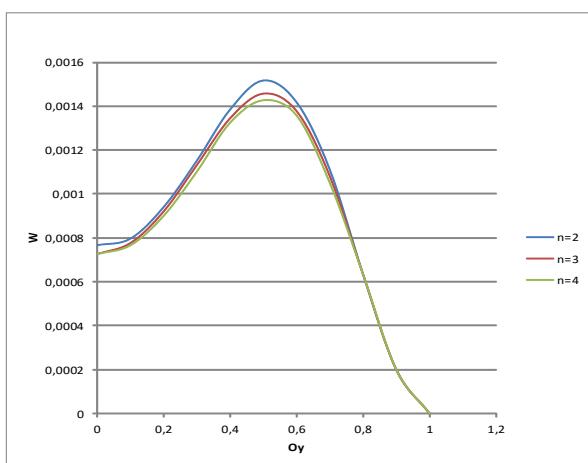
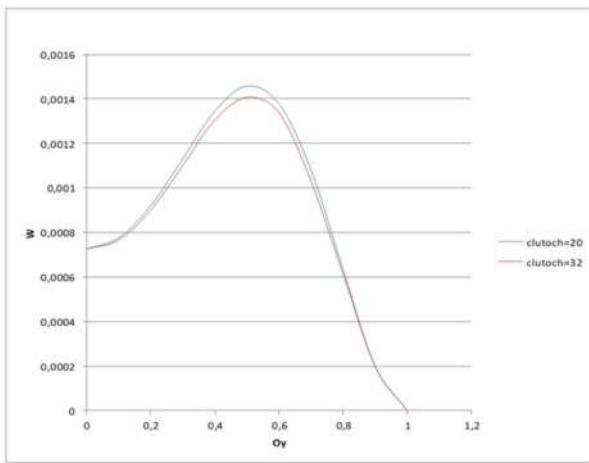


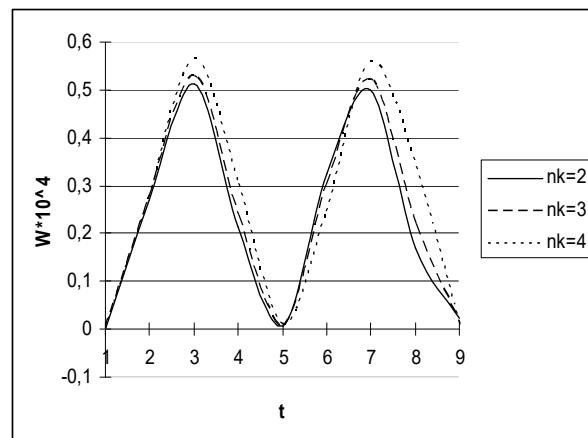
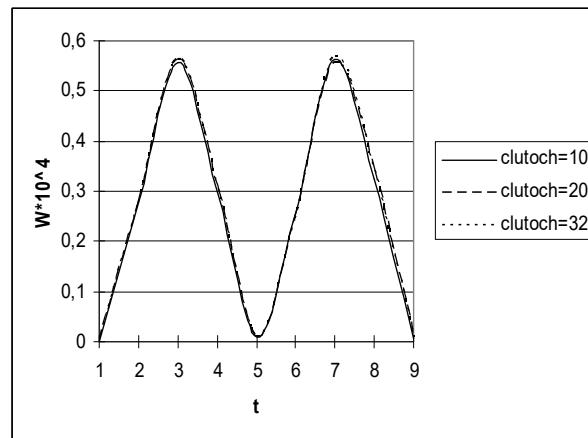
Рис. 2. Прогиб по оси Ox

Рис. 3. Прогиб по оси Oy Рис. 4. Прогиб по оси Oy

Из графиков, приведенных на рис. 1-4, видно, что прогиб достигает максимального значения в сечении OY при приближении к точке $x=0, y=0.5$, что следует ожидать. И значение $nk=3$ является достаточным для исследования поставленной задачи, при которой наблюдается хорошая сходимость. Следует также отметить, что с увеличением $clutoch$ сходимость улучшается.

Далее рассмотрим исследование сходимости численных результатов расчета относительно как количества координатных функций, так и числа узлов Гаусса. В качестве примера возьмем жесткозашемленную (медную) пластину формы круга с двумя круговыми вырезами. Базисную функцию, входящую в структуру решения (12), выберем в виде степенного полинома. Исследования проводились при тех же входящих механических и геометрических параметрах, приведенных в предыдущих расчетах в случае статики. На рис. 5 даны результаты численного исследования в точке $(0,0)$ относительно количества координатных функций, когда число узлов Гаусса ($clutoch$) равно 20, а степень полинома (ряда) (n) имеет значения 2, 3, 4, а на рис. 6 приводятся результаты численного исследования в рассмотренной точке $(0,0)$ относительно числа узлов Гаусса ($clutoch=10, 20, 32$) при фиксированном количестве координатных функций.

Здесь также следует отметить, что с увеличением количества координатных функций и узлов Гаусса сходимость результатов увеличивается, а также увеличивается точность численных расчетов.

Рис. 5. Прогиб в точке $(0,0)$ Рис. 6. Прогиб в точке $(0,0)$

Некоторые исследования в данном направлении также приведены в работах [14, 15]. Расчеты проводились на базе комплекса программных средств, описанного в работах [16, 17].

5. Заключение

Исследована сходимость вычислительного алгоритма расчета магнитоупругости тонких оболочек и пластин со сложной конструкционной формой относительно количества координатных функций структуры решений, построенных методом R-функций, а также относительно количества узлов (точек) при вычислении двукратных интегралов. При этом в качестве базисного полинома выбирается степенной полином и хорошая сходимость наблюдается при степени полинома 3-4, что соответствует количеству координатных функций, равному 10-15.

Литература

- [1] Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории и пластичности. – Ташкент: Фан, 1966. – 394 с.
- [2] Кабулов В.К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. – Ташкент: Фан, 1979. – 304 с.
- [3] Кабулов В.К., Файзулаев О.Ф., Назиров Ш.А. Ал-Хоразми, алгоритм и алгоритмизация. – Ташкент: Фан, 2006. – 664 с.
- [4] Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
- [5] Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. – Ереван: ЕГУ, 1991. – 144 с.
- [6] Рахматулин Х.А., Шкенев Ю.С. Взаимодействие сред и полей. – Ташкент: Фан, 1985. – 232 с.
- [7] Шкенев Ю.С. Пластины и оболочки в магнитном поле // Магнитные поля и их новые применения: Материалы совещания 6-7 декабря 1975. – М.: Наука, 1976. – С. 63-69.
- [8] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 562 с.
- [9] Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1973. – 118 с.
- [10] Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ ХПИ, 2009. – 408 с.
- [11] Нуралиев Ф.М. О построении математических моделей магнитоупругости тонких пластин и оболочек. – Москва, 2009. – № 1. – С.14-17.
- [12] Нуралиев Ф.М. Модульный анализ алгоритмов решения классов задач магнитоупругости тонких пластин и оболочек // Узб.журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2006. – № 5. – С. 32-36.
- [13] Нуралиев Ф.М. Алгоритм расчета магнитоупругих пологих оболочек методом R-функций // Узб.журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2007. – № 5-6. – С. 89-93.
- [14] Нуралиев Ф.М., Назиров Ш.А. Алгоритмизация решения задач магнитоупругости тонких тел методом R-функций // Проблемы машиностроения. – Харьков, 2011. – Т. 14, №1. – С. 61-69.
- [15] Nuraliev F.M., Nazirov Sh.A. Mathematical Modeling of Processes of Electro-Magnetic Fields' Affection Thin Conducting Plates by Complex Form // American Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2012. – № 2. – Pp. 30-33.
- [16] Нуралиев Ф.М. Описание программных средств для автоматизации решения классов задач магнитоупругости тонких пластин и оболочек // Вестник ТУИТ. – Ташкент, 2011. – № 3. – С. 55-58.
- [17] Нуралиев Ф.М. Описание модулей программного комплекса для расчета магнитоупругости пластин и оболочек со сложной формой // Вестник ТУИТ. – Ташкент, 2014. – № 2 (30). – С. 110-113.

UDC 004.94:532.685

NUMERICAL MODELING OF THE FILTRATION PROBLEM OF OIL AND GAS IN THREE-LAYER POROUS MEDIUM

Ravshanov N.

D.Sc., head of the laboratory, Center for the development of software and hardware-program complexes at Tashkent University of Information Technologies,
tel.: + (99871) 262-71-62, e-mail: ravshanzade-09@mail.ru

Islomov Yu.N.

Ph.D., assistant professor of the «Medical and biological physics, computer science and information technologies»
department of Tashkent Pediatric Medical Institute,
tel.: + (99893) 514-39-24, e-mail: yulduosh-islomov@rambler.ru

Kukanova M.

Teacher of Angren college of automation and service,
tel.: + (99893) 608-80-18

A mathematical model and a numerical algorithm for the solution of the problem of unsteady filtration process of oil and gas in layered heterogeneous porous media with different hydrogeological characteristics is discussed in the paper. In developing the mathematical model the temporal and spatial changes of pressure in the filtration layers depending on the coefficients of filtration, piezo-conductivity and bed thickness were taken into account.

Since the developed model is described by a system of nonlinear partial differential equations with relevant internal, initial and boundary conditions, its solution is found by performing the linearization of nonlinear terms and further applying of the numerical algorithm based on finite-difference approximation of differential operators.

Keywords: Mathematical model, numerical algorithm, filtration, oil, gas, pressure, bed thickness, layer.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ И ГАЗА
В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**
Равшанов Н., Исломов Ю.Н., Куканова М.

Приводится математическая модель и численный алгоритм для решения задачи неустановившейся фильтрации нефти и газа в неоднородных пористых средах, обладающих различными гидрогеологическими характеристиками. При разработке математической модели были учтены изменения давления в фильтрационных слоях по времени и по пространственным переменным в зависимости от коэффициентов фильтрации, пьезопроводности, мощности пластов. Так как разработанная модель описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими внутренними, начальными и граничными условиями, то её решение осуществлялось путём линеаризации нелинейных членов и последующим применением численного алгоритма, основанного на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных операторов.

Ключевые слова: математическая модель, численный алгоритм, фильтрация, нефть, газ, давление, мощность, пласт.

**UCH QATLAMLI G'OVAK MUHITDA NEFT VA GAZ FILTRASIYASI MASALASINI SONLI
MODELLASHTIRISH**
Ravshanov N., Islomov Yu. N., Kukanova M.

Ushbu ishda turli hil gidrogeologik xarekteristikaga ega, bir jinsli bo'Imagan g'ovak muhitdagi beqaror neft va gaz filtrasiysi masalasini yechishning matematik modeli va sonli algoritmi keltirilgan. Matematik modelni yaratishda filtratsiya, qatlardagi bosimning qayta taqsimlanishi hamda qatlamlar quvvati koeffitsientlariga bog'liq ravishda, vaqt va fazo bo'yicha filtratsiya qatlamlaridagi bosimning o'zgarishi hisobga olingan. Shunday qilib, yaratilgan model boshlang'ich, ichki va chegaraviy shartlari mavjud bo'lgan xususiy hosilali nochiziq differentials tenglamalar tizimi yordamida yozildi, uning chiziqsiz hadlarini chiziqli ko'rinishga keltirish va differentials operatorlarni chekli ayirmali approksimatsiyalash asosidagi sonli algoritmni qo'llash orqali yechiladi.

Tayanch iboralar: Matematik model, sonli algoritm, filtratsiya, neft, gaz, bosim, quvvat, qatlam.

1. Introduction

Mathematical models of the filtration process of multi-component fluids (oil, gas, and water) in layered porous medium can be described by the general laws of mechanics, and are reduced to the system of non-linear multi-dimensional partial differential equations with the corresponding initial, boundary and internal conditions which are impossible to get a solution in the analytical form. Every researcher studying the filtration process of multi-component environments using various simplifications in the physical formulation of the problem and thereby simplify the mathematical model of the object, as a result of which deviate from the object of study. The question of the adequacy of the developed mathematical model of the object of investigation remained unanswered.

The problem of mathematical modeling of fluid filtration in porous medium are researched by many major scientists and they obtained significant theoretical and practical results.

Development of mathematical model of fluid flow in nanoporous rocks is considered in [1]. In the development stage of mathematical modeling, it is suggested that the filter layer consists of two components: a fractured porous medium and the specific organic impurities consisting of kerogen. The model is based on the hypothesis that the permeability of inclusions essentially depends on the pressure gradient.

Enhanced mathematical model for the equilibrium two-phase (e.g. water-oil) flow in porous media is given in [2]. Received results of the calculations are compared with experimental data.

In [3] authors developed a mathematical model of filtration of multicomponent medium porous environment in which the relative permeability of the gas phase is replaced by a new expression, taking into account the effect of viscosity, density and the capillary effect of the mixture, and in [4] carried out the studies of capillary pressure corresponding to triangular tensor capillary diffusion in a three-phase fluid.

The work [5] is devoted to mathematical modeling of oil and gas field development process with consideration of the probability distribution of the parameters of the object of study.

Problems of building integrated mathematical models of multicomponent media filtration in multilayered reservoirs and the flow of gas-liquid mixtures in the oil and gas gathering pipeline networks are considered in [6].

Modeling such a complex system is defined as the process of calculating the generalized solution of the initial boundary value problem for a system of equations describing real physical processes in the reservoir, wells (lifts) and oil and gas gathering networks of land-based pipelines.

Questions of the mathematical modeling of non-isothermal filtration in porous medium, in case that a complete mixture flow is given, are considered in [7].

The problem related with the spread of the pressure field in low-permeability porous medium with two wells, which are connected by technogenic fracture is

considered in [8]. For this case, an approximate numerical solution is received. The analysis of the effect of the abovementioned fractures in the system parameters is made; the responses of pressure in the well are modeled. An inverse problem is solved using numerical algorithm and the parameters of the system are estimated for field data measured during hydrodynamic study by hydro-listening.

In [9] the problem of transfer in the three-phase mixture of a porous medium "water-gas-oil" in the case where the water contains a finely dispersed gas phase in the form of micro- or nano-bubbles is considered. It is assumed that the transfer of bubbles is mainly determined by the flow of the dispersed phase (water). At the same time large concentrations of gas phase in the pore space, as well as water and oil are carried in accordance with the modified Darcy law for multiphase mixtures. A mathematical model of motion of the mixture is developed, when the main phase (water, gas, oil) obey the equation of filtration, and the highly dispersed gas phase is described by the kinetic equation of the Boltzmann type.

2. Materials and methods

Taking into account the abovementioned facts, the process of unsteady filtration of the fluid in heterogeneous porous medium is considered in this paper, which differs from each other by the hydrogeological characteristics (fig. 1).

Let us consider the fluid filtration process in two layers. Each filtration layer has a corresponding pressure, which changes with time and the spatial variable, depending on the coefficient of permeability, diffusivity and thicknesses of layers and etc.

A mathematical model of the object is described by a system of differential equations in partial derivatives:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_3(P_3) \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_3(P_3) \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3(P_3) \frac{\partial P_3^2}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (M_3 P_3); \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_2(P_2) \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2(P_2) \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2(P_2) \frac{\partial P_2^2}{\partial z} \right) = \frac{\partial M_2 P_2}{\partial t} + Q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(P_1) \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1(P_1) \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1(P_1) \frac{\partial P_1^2}{\partial z} \right) = \frac{\partial M_1 P_1}{\partial t} \quad (3)$$

with the appropriate initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z)|_{t=0} &= p_h(x, y, z); \\ P_2(x, y, z)|_{t=0} &= P_h(x, y, z); \\ P_3(x, y, z)|_{t=0} &= P_h(x, y, z, t); \end{aligned} \quad (4)$$

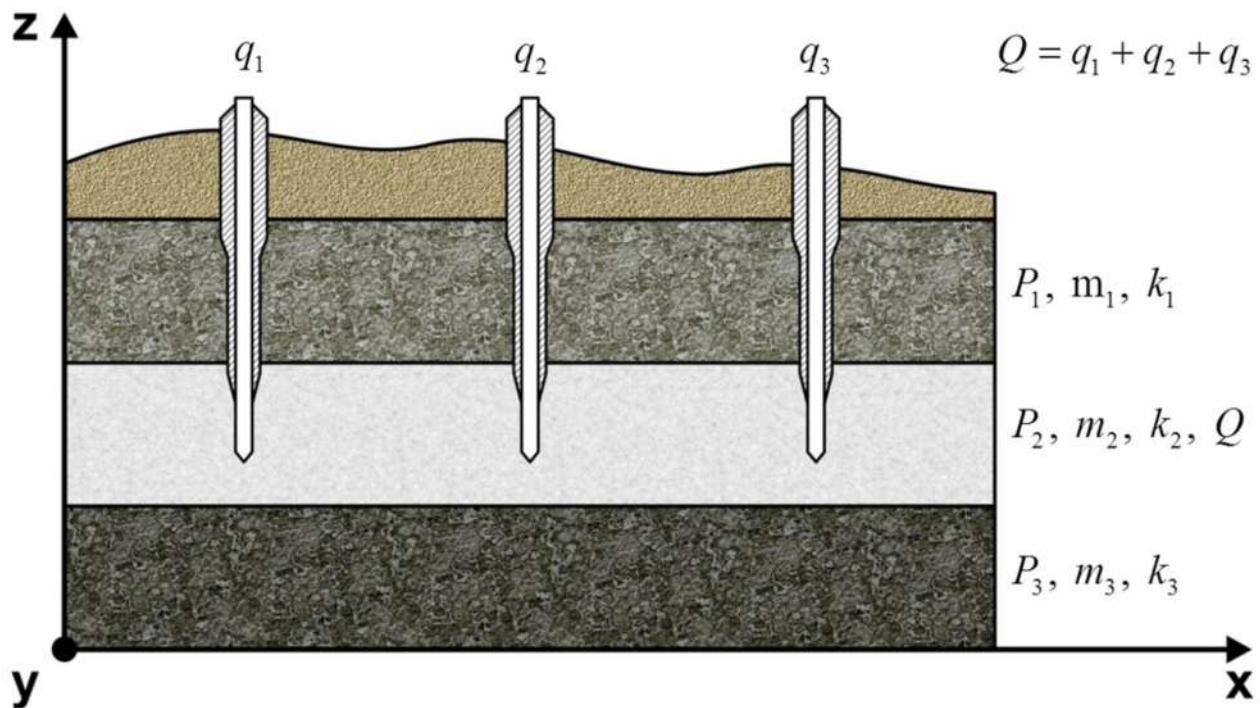


Fig. 1. Schematic representation of the three-layer filtration field

$$\begin{aligned}
 & k_3 \frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \\
 & k_1 \frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_1-0} = k_2 \frac{\partial P_2(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_1+0}; \\
 & P_1(x, y, z) \Big|_{z=H_1-0} = P_2(x, y, z) \Big|_{z=H_1+0}; \\
 & k_2 \frac{\partial P_2(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_2-0} = k_3 \frac{\partial P_3(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_2+0}; \quad (5) \\
 & P_2(x, y, z) \Big|_{z=H_2-0} = P_3(x, y, z) \Big|_{z=H_2+0}; \\
 & k_3 \frac{\partial P_3(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H_3} = 0; \\
 & (1 - \beta_1) (P_1(x, y, z, t) \Big|_{x=0} - P_c) + \\
 & + \alpha_1 \left(\frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = 0; \\
 & (1 - \beta_2) (P_1(x, y, z, t) \Big|_{x=1} - P_c) + \\
 & + \alpha_2 \left(\frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} \right) = 0; \\
 & (1 - \beta_3) (P_1(x, y, z, t) \Big|_{y=0} - P_c) + \\
 & + \alpha_3 \left(\frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = 0; \quad (6) \\
 & (1 - \beta_4) (P_1(x, y, z, t) \Big|_{y=1} - P_c) + \\
 & + \alpha_4 \left(\frac{\partial P_1(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=1} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 l &= 1, 2, 3; \quad Q = \sum_{i=1}^k q_i \delta(x - \xi_i, y - \xi_j, z - \xi_k); \\
 M_l &= \frac{m_0}{z_0} \frac{1}{P_l}.
 \end{aligned}$$

Here, when $l=1$ z varies in $0 < z < H_1$; at $l=2$ $H_1 < z < H_2$; $l=3$ – $H_2 < z < H_3$; (Fig. 1), P_l - the fluid pressure in the l -th layer; $k_l(P_l)$ - permeability of the l -th layer; q_i - volumetric flow rate (at atmospheric pressure) in the wells; m_0, z_0 - super compressibility factor and porosity under normal conditions.

Parameters $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ depending on the statement of problem can take the values 0 or 1.

From the statement of the problem, it follows that it is described by a system of nonlinear differential equations in partial derivatives with the corresponding boundary and internal conditions and it is impossible to obtain an analytical solution.

To solve this problem we develop an efficient numerical algorithm based on the finite - difference approximation, by using differential operators whose systems are replaced by the difference [10-14].

For the numerical integration of the equations (1) - (3) and the corresponding boundary conditions (5) - (6) we linearize the nonlinear terms as follows:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial x} \right) &= k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \\
 &+ \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial x} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_1}{\partial x} + \\
 &+ P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial x^2} + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial x} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right)^2 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial x} \left[\frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right] - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}; \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial x} \right) = k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \\
& + \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial x} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_2}{\partial x} + \\
& + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial x^2} + \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial x} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial x} \right] \frac{\partial P_2^s}{\partial x} - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}; \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(k_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial x} \right) = k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \\
& + \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial x} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_3}{\partial x} + \\
& + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial x^2} + \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial x} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial x} \right] \frac{\partial P_3^s}{\partial x} - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2}; \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(k_1 \frac{\partial P_1^2}{\partial y} \right) = k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \\
& + \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial y} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_1}{\partial y} + \\
& + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial y^2} + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial y} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial y} \right] \frac{\partial P_1^s}{\partial y} - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}; \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial P_2^2}{\partial y} \right) = k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \\
& + \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial y} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_2}{\partial y} + \\
& + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial y^2} + \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial y} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial y} \right] \frac{\partial P_2^s}{\partial y} - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}; \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(k_3 \frac{\partial P_3^2}{\partial y} \right) = k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \\
& + \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial y} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_3}{\partial y} + \\
& + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial y^2} + \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial y} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial y} \right] \frac{\partial P_3^s}{\partial y} - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2};
\end{aligned}$$

We get the following:

$$\begin{aligned}
& k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial x} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_1}{\partial x} + \\
& + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial x^2} + \\
& + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial x} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial x} \right] \frac{\partial P_1^s}{\partial x} - \\
& - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \\
& + \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial y} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_1}{\partial y} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial y^2} + \\
& + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial y} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial y} \right] \frac{\partial P_1^s}{\partial y} - \\
& - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial z} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right] \frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial z^2} + \\
 & + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial z} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial z} \right] \frac{\partial P_1^s}{\partial z} - \\
 & - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z} = \frac{2\partial M_1 P_1}{\partial t}; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial x} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_2}{\partial x} + \\
 & + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial x^2} + \\
 & + \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial x} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial x} \right] \frac{\partial P_2^s}{\partial x} - \\
 & - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x} + k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \\
 & + \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial y} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial y^2} + \\
 & + \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial y} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial y} \right] \frac{\partial P_2^s}{\partial y} - \\
 & - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial y} + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \\
 & + \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial z} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right] \frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial z^2} + \\
 & + \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial z} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial z} \right] \frac{\partial P_1^s}{\partial z} - \\
 & - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z} = \frac{2\partial M_2 P_2}{\partial t} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \delta(x - \xi_i, y - \xi_j, z - \xi_k); \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial x} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right] \frac{\partial P_3}{\partial x} + \\
 & + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial x^2} + \\
 & + \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial x} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial x} \right] \frac{\partial P_3^s}{\partial x} - \\
 & - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial x} + k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \\
 & + \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial y} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right] \frac{\partial P_3}{\partial y} + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial y^2} + \\
 & + \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial y} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial y} \right] \frac{\partial P_3^s}{\partial y} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial y} + k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} + \\
 & + \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial z} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial z} \right] \frac{\partial P_3}{\partial z} + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial z^2} + \\
 & + \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial z} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial z} \right] \frac{\partial P_3^s}{\partial z} - \\
 & - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial z} = \frac{2\partial M_3 P_3}{\partial t}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

After regrouping the members of equations (7) - (9), we get:

$$\begin{aligned}
 & k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \alpha_{1,1} \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial x^2} + \\
 & + \alpha_{1,2} \frac{\partial P_1^s}{\partial x} - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x} + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} + \\
 & + \alpha_{1,3} \frac{\partial P_1}{\partial y} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial y^2} + \alpha_{1,4} \frac{\partial P_1^s}{\partial y} - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial y} + \\
 & + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \alpha_{1,5} \frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial z^2} + \\
 & + \alpha_{1,6} \frac{\partial P_1^s}{\partial z} - 2k_1 P_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z} = \frac{2\partial M_1 P_1}{\partial t}; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \alpha_{2,1} \frac{\partial P_2}{\partial x} + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial x^2} + \\
 & + \alpha_{2,2} \frac{\partial P_2^s}{\partial x} - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x} + k_2 P_2^s \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \\
 & + \alpha_{2,3} \frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2 k_2 \frac{\partial^2 P_2^s}{\partial y^2} + \alpha_{2,4} \frac{\partial P_2^s}{\partial y} - \\
 & - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial y} + k_1 P_1^s \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} + \\
 & + \alpha_{2,5} \frac{\partial P_1}{\partial z} + P_1 k_1 \frac{\partial^2 P_1^s}{\partial z^2} + \alpha_{2,6} \frac{\partial P_2^s}{\partial z} - \\
 & - 2k_2 P_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z} = \frac{2\partial M_2 P_2}{\partial t} + \\
 & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \delta(x - \xi_i, y - \xi_j, z - \xi_k); \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \alpha_{3,1} \frac{\partial P_3}{\partial x} + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial x^2} + \\
 & + \alpha_{3,2} \frac{\partial P_3^s}{\partial x} - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial x} + k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + \\
 & + \alpha_{3,3} \frac{\partial P_3}{\partial y} + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial y^2} + \alpha_{3,4} \frac{\partial P_3^s}{\partial y} - \\
 & - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial y} + k_3 P_3^s \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} + \alpha_{3,5} \frac{\partial P_3}{\partial z} + \\
 & + P_3 k_3 \frac{\partial^2 P_3^s}{\partial z^2} + \alpha_{3,6} \frac{\partial P_3^s}{\partial z} - 2k_3 P_3 \frac{\partial^2 P_3}{\partial z} = \frac{2\partial M_3 P_3}{\partial t}; \quad (12)
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1} &= \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial x} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{1,2} &= \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial x} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{1,3} &= \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial y} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{1,4} &= \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial y} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{1,5} &= \left[2k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_1}{\partial z} P_1^s + k_1 \frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right]; \\ \alpha_{1,6} &= \left[2P_1 \frac{\partial k_1}{\partial z} + 2k_1 \left(\frac{\partial P_1^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_1^s \frac{\partial k_1}{\partial z} \right]. \\ \alpha_{2,1} &= \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial x} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{2,2} &= \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial x} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{2,3} &= \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial y} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{2,4} &= \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial y} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{2,5} &= \left[2k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial z} P_2^s + k_2 \frac{\partial P_2^s}{\partial z} \right]; \\ \alpha_{2,6} &= \left[2P_2 \frac{\partial k_2}{\partial z} + 2k_2 \left(\frac{\partial P_2^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_2^s \frac{\partial k_2}{\partial z} \right]. \\ \alpha_{3,1} &= \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial x} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{3,2} &= \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial x} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial x} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial x} \right]; \\ \alpha_{3,3} &= \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial y} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{3,4} &= \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial y} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial y} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial y} \right]; \\ \alpha_{3,5} &= \left[2k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial z} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial z} P_3^s + k_3 \frac{\partial P_3^s}{\partial z} \right]; \\ \alpha_{3,6} &= \left[2P_3 \frac{\partial k_3}{\partial z} + 2k_3 \left(\frac{\partial P_3^s}{\partial z} \right)^2 - 2P_3^s \frac{\partial k_3}{\partial z} \right].\end{aligned}$$

By approximating differential operators in equations (9) - (11) to finite-differences, we obtain:

$$\begin{aligned}& \frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \\ & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\ & \left. + 2P_{1,i,j,\xi}^s \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\ & \left. + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\ & - P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{1,i,j,\xi} \left[\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\ & + \left[2P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\ & \left. - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \\ & + \left(k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^n - 2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^n + \bar{P}_{1,i,j-1,\xi}^n}{h_y^2} \right) + \\ & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^n - \bar{P}_{1,i,j-1,\xi}^n}{2h_y} + \\ & + \left[2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^n \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\ & \left. - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] * \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\ & - k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\ & + k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^n - 2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^n + \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^n}{h_z^2} + \\ & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\ & \left. + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\ & \left. + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^n - \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^n}{2h_z} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[2\bar{\bar{P}}_{1,i,j,\xi}^n \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
 & - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \\
 & - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \left] \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \right. \\
 & - k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^n - 2P_{1,i,j,\xi}^n + P_{1,i,j,\xi-1}^n}{h_z^2} = \\
 & = \frac{M_1 P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} - M_1 P_{1,i,j,\xi}^n}{\Delta t / 3}; \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \\
 & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
 & + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \\
 & + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \left] \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \right. \\
 & - P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{1,i,j,\xi} \left[\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\
 & + \left[2P_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\
 & - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \\
 & - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}}{2h_x} \left] \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
 & + \left(k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - 2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{P}_{1,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{h_y^2} \right) + \\
 & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\
 & + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \left] \frac{\bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{P}_{1,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{2h_y} + \right. \\
 & + \left[2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\
 & - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \\
 & - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \left] \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \right. \\$$

$$\begin{aligned}
 & - k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\
 & + k_{1,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{1,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - 2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{h_z^2} + \\
 & + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
 & + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \\
 & + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \left] \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{2h_z} + \right. \\
 & + \left[2\bar{\bar{P}}_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
 & - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \\
 & - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \left] \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \right. \\
 & - k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j,\xi-1}^s}{h_z^2} = \\
 & = \frac{M_1 P_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} - M_1 P_{1,i,j,\xi}^n}{\Delta t / 3}; \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \\
& + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \left[\frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{P}_{1,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{2h_y} + \\
& + \left[2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\
& \quad \left. - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\
& - k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{1,i,j+1,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\
& + k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} + \\
& + \left[2k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + k_{1,i,j,\xi} \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{1,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{P}_{1,i,j,\xi-1}^{n+1}}{2h_z} + \\
& + \left[2\bar{P}_{1,i,j,\xi}^{n+1} \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
& \quad \left. - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2P_{k_{1,i,j,\xi}}^s \frac{k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\
& - k_{1,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i,j-1,\xi}^s}{h_z^2} \right] = \\
& - k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s \frac{P_{1,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2P_{1,i,j,\xi}^{n+1} + P_{1,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} = \\
& = \frac{M_1 P_{1,i,j,\xi}^{n+1} - M_1 P_{1,i,j,\xi}^{n+2/3}}{\Delta t / 3}; \quad (15) \\
& \frac{k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{2,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \\
& + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
& \quad \left. + 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\
& \quad \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{2,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\
& - P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{2,i,j,\xi} \left[\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\
& + \left[2P_{k_{2,i,j,\xi}}^{n+1/3} \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{2,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\
& - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \\
& - 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} \left[\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] + \\
& + \left(k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^n - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^n + \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^n}{h_y^2} \right) + \\
& + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\
& \quad \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\
& \quad \left. + 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^n - \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^n}{2h_y} + \\
& + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^n \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\
& \quad \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\
& - k_{2,i,j,\xi} \bar{P}_{2,i,j,\xi}^s \left[\frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i,j,\xi-1}^s}{h_y^2} \right] + \\
& + k_{2,i,j,\xi} \bar{P}_{2,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^n - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^n + \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^n}{h_z^2} + \\
& + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^n - \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^n}{2h_z} + \\
& + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^n \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
& \quad \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\
& - k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^n - 2P_{2,i,j,\xi}^n + P_{2,i,j,\xi-1}^n}{h_z^2} - \\
& - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \delta(x - \zeta_i, y - \zeta_j, z - \zeta_k) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{M_2 P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} - M_2 P_{2,i,j,\xi}^n}{\Delta t / 3}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{2,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\ & \left. + 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{2,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\ & - P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{2,i,j,\xi} \left[\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\ & + \left[2P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\ & \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \\ & + \left(k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{h_y^2} \right) + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{2h_y} + \\ & + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\ & \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\ & - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right] + \\ & - k_{2,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\ & + k_{2,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{2,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{h_z^2} + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{2h_z} + \\ & + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\ & \left. - 2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\ & - k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - 2P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{2,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{h_z^2} - \\ & - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \delta(x - \xi_i, y - \xi_j, z - \xi_k) = \\ & = \frac{M_2 P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} - M_2 P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3}}{\Delta t / 3}; \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{2,i+1,j,\xi}^{n+2/3} - 2P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} + P_{2,i-1,j,\xi}^{n+2/3} \right) + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\ & \left. + 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^{n+2/3} - P_{2,i-1,j,\xi}^{n+2/3}}{2h_x} - \\ & - P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} k_{2,i,j,\xi} \left[\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\ & + \left[2P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\ & \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i+1,j,\xi} - k_{2,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{2,i+1,j,\xi}^s - P_{2,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \\ & + \left(k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{h_y^2} \right) + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\ & \left. + 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{P}_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{2h_y} + \\ & + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\ & \left. - 2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\ & - 2P_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right] + \\ & - k_{2,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\ & + k_{2,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{2,i,j,\xi}^s \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{h_z^2} + \\ & + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\ & \left. + k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2k_{2,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \\
& -2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \left[\frac{k_{2,i,j+1,\xi} - k_{2,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - P_{2,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} - \\
& -k_{2,i,j,\xi} \bar{P}_{1,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{2,i,j+1,\xi}^s - 2P_{2,i,j,\xi}^s + P_{2,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\
& +k_{2,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{2,i,j,\xi}^s \left[\frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} \right] + \\
& + \left[2k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. +k_{2,i,j,\xi} \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. +2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{2,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{P}_{2,i,j,\xi-1}^{n+1}}{2h_z} + \\
& \quad + \left[2\bar{P}_{2,i,j,\xi}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
& \quad \left. -2k_{1,i,j,\xi} \left(\frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. -2P_{k_{2,i,j,\xi}}^s \frac{k_{2,i,j,\xi+1} - k_{2,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^s - P_{2,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\
& \quad -k_{2,i,j,\xi} P_{2,i,j,\xi}^s \frac{P_{2,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2P_{2,i,j,\xi}^{n+1} + P_{2,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} = \\
& \quad = \frac{M_2 P_{2,i,j,\xi}^{n+1} - M_2 P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3}}{\Delta t / 3} + \\
& \quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \delta(x - \xi_i, y - \xi_j, z - \xi_k); \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{3,i,j,\xi} P_{3,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{3,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{3,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \\
& \quad + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
& \quad \left. +2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\
& \quad \left. +k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{3,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\
& \quad -P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{3,i,j,\xi} \left[\frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - 2P_{3,i,j,\xi}^s + P_{3,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\
& \quad + \left[2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\
& \quad \left. -2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. + \left[2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
& \quad \left. + \left[k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{\bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^n - \bar{P}_{3,i,j-1,\xi}^n}{2h_y} + \right. \\
& \quad \left. + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^n - \bar{P}_{3,i,j-1,\xi}^n}{2h_y} + \right. \\
& \quad \left. + \left[2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_y} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_y} - \\
& \quad -k_{3,i,j,\xi} \bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - 2P_{3,i,j,\xi}^s + P_{3,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\
& \quad +k_{3,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi}^s \left[\frac{\bar{P}_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{P}_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} \right] + \\
& \quad + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. +k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. +2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{P}_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{2h_z} + \\
& \quad + \left[2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
& \quad \left. -2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. -2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\
& \quad -k_{3,i,j,\xi} P_{3,i,j,\xi}^s \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2P_{3,i,j,\xi}^{n+1} + P_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} = \\
& \quad = \frac{M_3 P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} - M_3 P_{3,i,j,\xi}^n}{\Delta t / 3}; \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \right. \\
 & \quad \left. + 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} + \right. \\
 & \quad \left. + k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{3,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} - \\
 & \quad - P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} k_{3,i,j,\xi} \left[\frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - 2P_{3,i,j,\xi}^s + P_{3,i-1,j,\xi}^s}{h_x^2} \right] + \\
 & \quad + \left[2P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} - \right. \\
 & \quad \left. - 2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i+1,j,\xi} - k_{3,i-1,j,\xi}}{2h_x} \right] \frac{P_{3,i+1,j,\xi}^s - P_{3,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \\
 & \quad + \left(k_{3,i,j,\xi} P_{3,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - 2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{P}_{3,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{h_y^2} \right) + \\
 & \quad + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - P_{3,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\
 & \quad \left. + k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - P_{3,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \right. \\
 & \quad \left. + 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i,j+1,\xi} - k_{3,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{\bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{P}_{3,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{2h_y} + \\
 & \quad + \left[2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^{n+2/3} \frac{k_{3,i,j+1,\xi} - k_{3,i,j-1,\xi}}{2h_y} - \right. \\
 & \quad \left. - 2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - P_{3,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i,j+1,\xi} - k_{3,i,j-1,\xi}}{2h_y} \right] \frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - P_{3,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} + \\
 & \quad + \left(k_{3,i,j,\xi} \bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^s \frac{\bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - 2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{P}_{3,i,j-1,\xi}^{n+2/3}}{h_z^2} \right) + \\
 & \quad + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
 & \quad \left. + k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
 & \quad \left. + 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{P}_{3,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - \bar{P}_{3,i,j,\xi-1}^{n+1/3}}{2h_z} + \\
 & \quad + \left[2\bar{P}_{3,i,j,\xi}^n \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
 & \quad \left. - k_{3,i,j,\xi} \bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - 2P_{3,i,j,\xi}^s + P_{3,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] \right] +
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& -k_{3,i,j,\xi} \bar{P}_{3,i,j+1,\xi}^s \left[\frac{P_{3,i,j+1,\xi}^s - 2P_{3,i,j,\xi}^s + P_{3,i,j-1,\xi}^s}{h_y^2} \right] + \\
& + k_{3,i,j,\xi} \bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi}^s \frac{\bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2\bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} + \\
& + \left[2k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + k_{3,i,j,\xi} \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} + \right. \\
& \quad \left. + 2P_{3,i,j,\xi}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{\bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{2h_z} + \\
& + \left[2\bar{\bar{P}}_{3,i,j,\xi}^n \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} - \right. \\
& \quad \left. - 2k_{3,i,j,\xi} \left(\frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2P_{k_{3,i,j,\xi}}^s \frac{k_{3,i,j,\xi+1} - k_{3,i,j,\xi-1}}{2h_z} \right] \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^s - P_{3,i,j,\xi-1}^s}{2h_z} - \\
& - k_{3,i,j,\xi} P_{3,i,j,\xi}^s \frac{P_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - 2P_{3,i,j,\xi}^{n+1} + P_{3,i,j,\xi-1}^{n+1}}{h_z^2} = \\
& = \frac{M_3 P_{3,i,j,\xi}^{n+1} - M_3 P_{3,i,j,\xi}^{n+2/3}}{\Delta t/3}. \tag{21}
\end{aligned}$$

By grouping the members of (13- 21), we have:

$$\begin{aligned}
& (\gamma_{1,i,j,\xi} + \gamma_{2,i,j,\xi}) P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - \\
& - \left(2\gamma_{1,i,j,\xi} - \gamma_{3,i,j,\xi} - \gamma_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\gamma_{1,i,j,\xi} - \gamma_{2,i,j,\xi}) P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} = F_{1,i,j,\xi}; \\
& (\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} + \bar{\gamma}_{2,i,j,\xi}) P_{1,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \\
& - \left(2\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{3,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} + \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{2,i,j,\xi}) P_{1,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = F_{2,i,j,\xi}; \\
& (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} + \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{1,i,j,\xi+1}^{n+1} - \\
& - \left(2\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{3,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{1,i,j,\xi}^{n+1} + \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{1,i,j,\xi-1}^{n+1} = F_{3,i,j,\xi}; \\
& (\gamma_{1,i,j,\xi} + \gamma_{2,i,j,\xi}) P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - \\
& - \left(2\gamma_{1,i,j,\xi} - \gamma_{3,i,j,\xi} - \gamma_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + \tag{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{2,i,j,\xi}) P_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = F_{2,i,j,\xi}; \\
& (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} + \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{2,i,j,\xi+1}^{n+1} - \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{3,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{2,i,j,\xi}^{n+1} + \\
& + (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{2,i,j,\xi-1}^{n+1} = F_{3,i,j,\xi}; \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma_{1,i,j,\xi} + \gamma_{2,i,j,\xi}) P_{3,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - \\
& - \left(2\gamma_{1,i,j,\xi} - \gamma_{3,i,j,\xi} - \gamma_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} + \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\gamma_{1,i,j,\xi} - \gamma_{2,i,j,\xi}) P_{3,i-1,j,\xi}^{n+1/3} = F_{1,i,j,\xi}; \\
& (\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} + \bar{\gamma}_{2,i,j,\xi}) P_{3,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \\
& - \left(2\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{3,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{3,i,j,\xi}^{n+2/3} + \tag{29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} - \bar{\gamma}_{2,i,j,\xi}) P_{3,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = F_{2,i,j,\xi}; \\
& (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} + \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - \\
& - \left(2\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{3,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{4,i,j,\xi} + \frac{M_1}{\Delta t/3} \right) P_{3,i,j,\xi}^{n+1} + \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} - \bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi}) P_{3,i,j,\xi-1}^{n+1} = F_{3,i,j,\xi}.
\end{aligned}$$

Or equations (22) - (30) can be written in compact forms as follows:

$$\begin{aligned}
& a_i P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - b_i P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + c_i P_{1,i-1,j-1,\xi}^{n+1/3} = d_{1,i}; \\
& \bar{a}_j P_{1,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{b}_j P_{1,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{c}_j P_{1,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = \bar{d}_{2,j}; \\
& \equiv \bar{a}_{\xi} P_{1,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{b}_{\xi} P_{1,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{c}_{\xi} P_{1,i,j,\xi-1}^{n+1} = \bar{d}_{3,\xi}; \\
& a_i P_{2,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - b_i P_{2,i,j,\xi}^{n+1/3} + c_i P_{2,i-1,j-1,\xi}^{n+1/3} = d_{1,i}; \\
& \bar{a}_j P_{2,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{b}_j P_{2,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{c}_j P_{2,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = \bar{d}_{2,j}; \\
& \equiv \bar{a}_{\xi} P_{2,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{b}_{\xi} P_{2,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{c}_{\xi} P_{2,i,j,\xi-1}^{n+1} = \bar{d}_{3,\xi}; \\
& a_i P_{3,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - b_i P_{3,i,j,\xi}^{n+1/3} + c_i P_{3,i-1,j-1,\xi}^{n+1/3} = d_{1,i}; \\
& \bar{a}_j P_{3,i,j+1,\xi}^{n+2/3} - \bar{b}_j P_{3,i,j,\xi}^{n+2/3} + \bar{c}_j P_{3,i,j-1,\xi}^{n+2/3} = \bar{d}_{2,j}; \\
& \equiv \bar{a}_{\xi} P_{3,i,j,\xi+1}^{n+1} - \bar{b}_{\xi} P_{3,i,j,\xi}^{n+1} + \bar{c}_{\xi} P_{3,i,j,\xi-1}^{n+1} = \bar{d}_{3,\xi}.
\end{aligned}$$

where

$$\gamma_{1,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x^2};$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_{2,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_x^2} (P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s) + \\
& + \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{2h_x^2} (k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi}) + \\
& + \frac{k_{1,i,j,\xi}}{4h_x^2} (P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s) = \\
& + \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{2h_x^2} (k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_x^2} + \frac{k_{1,i,j,\xi}}{4h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s \right) + \\
&\quad - \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right)^2 - \\
&\gamma_{3,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i-1,j,\xi}^s \right); \\
&\gamma_{4,i,j,\xi} = \frac{1}{h_x} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) + \left(\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right); \\
&\bar{\gamma}_{1,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x^2}; \\
&\bar{\gamma}_{2,i,j,\xi} = \left[\frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \right. \\
&\quad + \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{2h_y^2} \left(k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{k_{1,i,j,\xi}}{4h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) \right]; \\
&\bar{\gamma}_{3,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j-1,\xi}^s \right); \\
&\bar{\gamma}_{4,i,j,\xi} = \frac{1}{2h_y^2} \left(k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi} \right) + \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right); \\
&\bar{\bar{\gamma}}_{1,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^s}{h_z^2}; \\
&\bar{\bar{\gamma}}_{2,i,j,\xi} = \left[\left(\frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_z^2} + \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_z^2} \right) \left(P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s \right) + \right. \\
&\quad + \left. \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{2h_z^2} \left(k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1} \right) \right]; \\
&\bar{\bar{\gamma}}_{3,i,j,\xi} = \frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_z^2} \left(P_{1,i,j,\xi+1}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j,\xi-1}^s \right); \\
&\bar{\bar{\gamma}}_{4,i,j,\xi} = \frac{1}{2h_z^2} \left(k_{1,i,j,\xi+1} - k_{1,i,j,\xi-1} \right) + \left(P_{1,i,j,\xi+1}^s - P_{1,i,j,\xi-1}^s \right); \\
&F_{1,i,j,\xi} = \left[\frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s \right)^2 - \right. \\
&\quad - \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) \left. \right] \frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} + \\
&\quad + \frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - 2P_{1,i,j,\xi}^s + P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \\
&\quad + \left[\frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_y} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \right. \\
&\quad + \left. \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{h_x} \left(k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi} \right) \left. \right] \frac{1}{2h_y} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \\
&\quad + \frac{P_{1,i,j,\xi}^n}{h_y} \left(k_{1,i,j+1,\xi} - k_{1,i,j-1,\xi} \right) - \\
&\quad - \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right)^2 - \\
&\quad - \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) \left[\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] - \\
&\quad - \left[\frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3}}{h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) \right] + \\
&\quad + \left[\frac{k_{1,i,j,\xi}}{h_x} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) + \\
&\quad + \left. \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s \right)^2 \right] \left[\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3}}{2h_x} \right] + \\
&\quad + \left[\frac{P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3}}{h_x} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) - \right. \\
&\quad - \frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s \right)^2 - \\
&\quad - \frac{P_{1,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{1,i+1,j,\xi} - k_{1,i-1,j,\xi} \right) \left[\frac{P_{1,i+1,j,\xi}^s - P_{1,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right] - \\
&\quad - \left[\frac{k_{1,i,j,\xi} P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3}}{h_x^2} \left(P_{1,i+1,j,\xi}^{n+1/3} - 2P_{1,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{1,i-1,j,\xi}^{n+1/3} \right) \right] - \\
&\quad - \left[\frac{k_{1,i,j,\xi}}{2h_y^2} \left(P_{1,i,j+1,\xi}^s - P_{1,i,j-1,\xi}^s \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_y} \left(k_{l,i,j+1,\xi} - k_{l,i,j-1,\xi} \right) \left[\left(\frac{P_{l,i,j+1,\xi}^s - P_{l,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - 2P_{l,i,j,\xi}^{n+1/3} + P_{l,i,j,\xi-1}^{n+1/3} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) + \right. \\
& + \left. \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(k_{l,i,j,\xi+1} - k_{l,i,j,\xi-1} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{k_{l,i,j,\xi}^2}{2h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right)^2 \right] \frac{1}{2h_x} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^{n+1/3} - P_{l,i,j,\xi-1}^{n+1/3} \right) + \\
& + \left[\frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(k_{l,i,j,\xi+1} - k_{l,i,j,\xi-1} \right) - \right. \\
& - \frac{k_{l,i,j,\xi}^2}{2h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right)^2 + \\
& + \left. \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(k_{l,i,j,\xi+1} - k_{l,i,j,\xi-1} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) - \\
& - \frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^{n+1/3}}{h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - 2P_{l,i,j,\xi}^s + P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) - \frac{MP_{l,i,j,\xi}^{n+1/3}}{\Delta t/3} \Bigg] + \\
& + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K q_{l,j,k} \delta(x-\xi_i, y-\xi_j, z-\xi_k); \\
F_{3,i,j,\xi} & = \left[\frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^s}{h_x^2} \left(P_{l,i+1,j,\xi}^{n+2/3} - 2P_{l,i,j,\xi}^{n+2/3} + P_{l,i-1,j,\xi}^{n+2/3} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{k_{l,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(P_{l,i+1,j,\xi}^{n+2/3} - P_{l,i-1,j,\xi}^{n+2/3} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{l,i+1,j,\xi} - k_{l,i-1,j,\xi} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{k_{l,i,j,\xi}^2}{2h_x^2} \left(P_{l,i+1,j,\xi}^s - P_{l,i-1,j,\xi}^s \right)^2 \right] \left(P_{l,i+1,j,\xi}^{n+2/3} - P_{l,i-1,j,\xi}^{n+2/3} \right) + \\
& + \left[\frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{l,i+1,j,\xi} - k_{l,i-1,j,\xi} \right) - \right. \\
& - \frac{k_{l,i,j,\xi}^2}{2h_x^2} \left(P_{l,i+1,j,\xi}^s - P_{l,i-1,j,\xi}^s \right)^2 - \\
& - \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_x} \left(k_{l,i+1,j,\xi} - k_{l,i-1,j,\xi} \right) \left[\left(\frac{P_{l,i+1,j,\xi}^s - P_{l,i-1,j,\xi}^s}{2h_x} \right) - \right. \\
& - \left. \left[\frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^{n+2/3}}{h_x^2} \left(P_{l,i+1,j,\xi}^s - 2P_{l,i,j,\xi}^s + P_{l,i-1,j,\xi}^s \right) \right] - \right. \\
& - \left. \left[\frac{k_{l,i,j,\xi}^s}{2h_y^2} \left(P_{l,i,j+1,\xi}^s - P_{l,i,j-1,\xi}^s \right) + \right. \right. \\
\end{aligned}$$

$\left. \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_y} \left(k_{l,i,j+1,\xi} - k_{l,i,j-1,\xi} \right) \right] \left[\left(\frac{P_{l,i,j+1,\xi}^s - P_{l,i,j-1,\xi}^s}{2h_y} \right) + \right. \\
\left. \left. \left[\frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^{n+2/3} - 2P_{l,i,j,\xi}^{n+2/3} + P_{l,i,j,\xi-1}^{n+2/3} \right) \right] + \right. \\
\left. \left. \left[\frac{k_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) + \right. \right. \\
\left. \left. \left. \frac{P_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(k_{l,i,j,\xi+1} - k_{l,i,j,\xi-1} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. \left. + \frac{k_{l,i,j,\xi}^2}{2h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right)^2 \right] \right] \frac{1}{2h_x} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^{n+2/3} - P_{l,i,j,\xi-1}^{n+2/3} \right) + \right. \\
\left. \left. \left. + \frac{k_{l,i,j,\xi}^s}{h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right)^2 \right] \frac{1}{2h_z} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) - \right. \\
\left. \left. \left. - \frac{k_{l,i,j,\xi} P_{l,i,j,\xi}^{n+2/3}}{h_z^2} \left(P_{l,i,j,\xi+1}^s - 2P_{l,i,j,\xi}^s + P_{l,i,j,\xi-1}^s \right) - \frac{MP_{l,i,j,\xi}^{n+2/3}}{\Delta t/3} \right] \right].$

To solve the stated problem, we approximate the boundary conditions (5) - (6) with the second order of accuracy of the spatial variable and get the following:

$$k_1 \left(-3P_{1,0} + 4P_{1,1} - \frac{b_1}{a_1} P_{1,1} + \frac{c_1}{a_1} P_{1,0} - \frac{f_1}{a_1} \right) = 0$$

or

$$(-3a_1 + c_1) P_{1,0} + (4a_1 - b_1) P_{1,1} - \frac{f_1}{a_1} = 0,$$

where

$$P_{1,0} = -\frac{(4a_1 - b_1)}{(-3a_1 + c_1)} P_{1,1} + \frac{f_1}{a_1 (c_1 - 3a_1)}.$$

By approximating the boundary condition:

$$k_1 \frac{\partial P_1}{\partial z} \Big|_{z=H-0} = k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=H+0}$$

we get:

$$\begin{aligned}
& k_1 \left(3P_{1,m_1} - 4P_{1,m_1-1} + P_{1,m_1-2} \right) = \\
& = \frac{k_2}{k_1} \left(3P_{2,m_1} - 4P_{2,m_1+1} + P_{2,m_1+2} \right); \\
& k_1 \left(3P_{1,m_1} - 4P_{1,m_1-1} + (\alpha_{m_1-2} P_{1,m_1-1} + \beta_{m_1-2}) \right) = \delta_{1,m_1} \\
& k_1 \left(3P_{1,m_1} - (4 + \alpha_{m_1-2}) P_{1,m_1-1} + \beta_{m_1-2} \right) = \delta_{1,m_1} \\
& k_1 \left(3P_{1,m_1} - (4 + \alpha_{m_1-2})(\alpha_{m_1-1} P_{1,m_1-1} + \beta_{m_1-1}) + \beta_{m_1-2} \right) = \delta_{1,m_1} \\
& k_1 \left(3 - ((4 + \alpha_{m_1-2}) \alpha_{m_1-1}) P_{1,m_1-1} - \right. \\
& \left. - (4 + \alpha_{m_1-2}) \beta_{m_1-1} + \beta_{m_1-2} \right) = \delta_{1,m_1}
\end{aligned}$$

or

$$P_{1,m_1} = \frac{(4 - \alpha_{m_1-2})\beta_{m_1-1} + \beta_{m_1-1} + \delta_{1,m_1}}{3 - (4 - \alpha_{m_1-1} + \alpha_{m_1-2}\beta_{m_1-1})};$$

$$\delta_{1,m_1} = \frac{k_2}{k_1} (3P_{2,m_1} - 4P_{2,m_1+1} + P_{2,m_1+2}).$$

Similarly approximating the boundary conditions

$$k_2 \frac{\partial P_2}{\partial z} \Big|_{z=H_2-0} = k_3 \frac{\partial P_3}{\partial z} \Big|_{z=H_2+1}$$

we get

$$P_{2,m_1} = \frac{(4 - \alpha_{m_2-2})\beta_{m_2-1} + \beta_{m_2-1} + \delta_{2,m_2}}{3 - (4 - \alpha_{m_2-1} + \alpha_{m_2-2}\beta_{m_2-1})};$$

$$\delta_{2,m_2} = \frac{k_3}{k_2} (P_{3,m_2} - 4P_{3,m_2+1} + P_{3,m_2+2}).$$

For the boundary conditions

$$k_3 \frac{\partial P_3}{\partial z} \Big|_{z=M} = 0$$

we get:

$$3P_{3,M} - 4P_{3,M-1} + P_{3,M-2} = 0;$$

$$P_{3,M-2} = \alpha_{M-2}P_{3,M-1} + \beta_{M-2};$$

$$3P_{3,M} - 4P_{3,M-1} + \alpha_{z,M-2}P_{3,M-1} + \beta_{z,M-2} = 0;$$

$$3P_{3,M} - (4 + \alpha_{z,M-2})P_{3,M-1} + \beta_{z,M-2} = 0;$$

$$3P_{3,M} - (4 + \alpha_{z,M-2})(\alpha_{z,M-2}P_{3,M} + \beta_{z,M-1}) + \beta_{z,M-2} = 0; \\ (3 - (4 - \alpha_{z,M-2})\alpha_{z,M-1})P_{3,M} - \\ -(4 + \alpha_{z,M-2})\beta_{z,M-1} + \beta_{z,M-2} = 0.$$

Then

$$P_{3,M} = \frac{(4 + \alpha_{z,M-2})\beta_{z,M-1} + \beta_{z,M-2}}{3 - (4 - \alpha_{z,M-2})\alpha_{z,M-1}}.$$

For the boundary conditions

$$(1 - \delta_1)(P_l \Big|_{x=0} - P_c) + \delta_1 \left(\frac{\partial P_l}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = 0$$

we get:

$$(1 - \delta_1)(P_{l,0} - P_c) + \delta_1 \left(\frac{3P_{l,0} - 4P_{l,1} + P_{l,2}}{2h_x} \right) = 0;$$

$$(1 - \delta_1)P_{l,0} - (1 - \delta_1)P_c + \\ + \frac{\delta_1}{2h_x} 3P_{l,0} - \frac{2\delta_1}{h_x} P_{l,1} + \frac{\delta_1}{2h_x} P_{l,2} = 0;$$

$$\left((1 - \delta_1) + \frac{3\delta_1}{2h_x} \right) P_{l,0} - \frac{2\delta_1}{h_x} P_{l,1} + \\ + \frac{\delta_1}{2h_x} P_{l,2} = (1 - \delta_1)P_c;$$

$$\varphi_1 P_{l,0} - \varphi_2 P_{l,1} + \varphi_3 \left(\frac{b_1 P_{l,1} - c_1 P_{l,0} - f_1}{a_1} \right) = (1 - \delta_1)P_c;$$

$$\varphi_1 P_{l,0} - \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_3}{a_1} b_1 \right) P_{l,1} - \frac{\varphi_3 c_1}{a_1} P_{l,0} - \frac{\varphi_3}{a_1} f_1 = (1 - \delta_1)P_c;$$

$$\varphi_1 P_{l,0} - \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_3}{a_1} b_1 \right) P_{l,1} - \frac{\varphi_3 c_1}{a_1} P_{l,0} - \frac{\varphi_3}{a_1} f_1 = (1 - \delta_1)P_c;$$

$$\left(a_1 \varphi_1 - \frac{\varphi_3 c_1}{a_1} \right) P_{l,0} - (a_2 \varphi_1 - \varphi_3 b_1) P_{l,1} = \frac{\varphi_3 f_1}{a_1} + (1 - \delta_1)P_c.$$

Then

$$P_{l,0} = \frac{(\varphi_2 c_1 - \varphi_3 c_1)}{(a_1 \varphi_1 - \varphi_3 c_1)} P_{l,1} + \frac{\varphi_3 f_1}{a_1} + (1 - \delta_1)P_c,$$

where

$$\alpha_{x,0} = \frac{(\varphi_2 c_1 - \varphi_3 c_1)}{(a_1 \varphi_1 - \varphi_3 c_1)}; \quad \beta_{x,0} = \frac{\varphi_3 f_1}{a_1} + (1 - \delta_1)P_c;$$

$$\varphi_1 = (1 - \delta_1) \frac{3\delta_1}{2h_x}; \quad \varphi_2 = \frac{2\delta_1}{h_x}; \quad \varphi_3 = \frac{\delta_1}{2h_x}.$$

By approximating the boundary condition

$$(1 - \delta_2) \left(P_l \Big|_{x=1} - P_c \right) + \delta_2 \left(\frac{\partial P_l}{\partial x} \Big|_{x=1} \right) = 0;$$

we get

$$(1 - \delta_2) \left(P_{l,N} - P_c \right) + \delta_2 \left(\frac{3P_{l,N} - 4P_{l,N-1} + P_{l,N-2}}{2h_x} \right) = 0;$$

$$\left((1 - \delta_2) + \frac{3\delta_2}{2h_x} \right) P_{l,N} - \frac{2\delta_2}{h_x} P_{l,N-1} + \frac{\delta_2}{2h_x} P_{l,N-2} = (1 - \delta_2)P_c;$$

$$\bar{\varphi}_1 P_{l,N} - \bar{\varphi}_2 P_{l,N-1} +$$

$$+ \bar{\varphi}_3 (\alpha_{x,N-2} P_{l,N-1} + \beta_{x,N-1}) = (1 - \delta_2)P_c;$$

$$\bar{\varphi}_1 P_{l,N} - (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{x,N-2}) P_{l,N-1} +$$

$$+ \bar{\varphi}_3 \beta_{x,N-1} = (1 - \delta_2)P_c;$$

$$\bar{\varphi}_1 P_{l,N} - (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{x,N-2}) \alpha_{x,N-1} P_{l,N} -$$

$$- (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{x,N-2}) \beta_{x,N-1} + \bar{\varphi}_3 \beta_{x,N-1} = (1 - \delta_2)P_c,$$

where

$$\bar{\varphi}_1 = (1 - \delta_2) \frac{3\delta_2}{2h_x}; \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{2\delta_2}{h_x}; \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{\delta_2}{2h_x}.$$

Hence

$$P_{l,N} = \frac{(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{x,N-2}) \beta_{x,N-1} + \bar{\varphi}_3 \beta_{x,N-1} + (1 - \delta_2)P_c}{(\bar{\varphi}_1 - (\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{x,N-2}) \alpha_{x,N-1})}.$$

Similarly, by approximating the condition

$$(1 - \delta_3) \left(P_l \Big|_{y=0} - P_c \right) + \delta_3 \left(\frac{\partial P_l}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) = 0$$

we get

$$(1 - \delta_3) \left(P_{l,0} - P_c \right) + \delta_3 \left(\frac{3P_{l,0} - 4P_{l,1} + P_{l,2}}{2h_y} \right) = 0;$$

$$\left((1 - \delta_3) + \frac{3\delta_3}{2h_y} \right) P_{l,0} - (1 - \delta_2)P_c - \frac{2\delta_3}{h_y} P_{l,1} + \frac{\delta_3}{2h_y} P_{l,2} = 0;$$

$$\bar{\varphi}_1 P_{l,0} - \bar{\varphi}_2 P_{l,1} + \bar{\varphi}_3 \left(\frac{\bar{b}_1 P_{l,1} - \bar{c}_1 P_{l,0} - \bar{f}_1}{\bar{a}_1} \right) = (1 - \delta_3)P_c;$$

$$\left(\bar{\varphi}_1 - \frac{\bar{\varphi}_3 \bar{c}_1}{\bar{a}_1} \right) P_{l,0} - \left(\bar{\varphi}_2 - \frac{\bar{\varphi}_3}{\bar{a}_1} \right) P_{l,1} = \frac{\bar{\varphi}_3 \bar{f}_1}{\bar{a}_1} + (1 - \delta_3)P_c;$$

$$P_{l,0} = \frac{\left(\bar{\bar{\varphi}}_3 - \bar{\bar{\varphi}}_3\right)}{\left(\bar{\bar{\varphi}}_1 a_1 - \bar{\bar{\varphi}}_3\right)} P_{l,1} + \frac{\left(\frac{\bar{\bar{\varphi}}_3 \bar{f}_1}{\bar{a}_1} + (1 - \delta_1) P_c\right)}{\left(\bar{\bar{\varphi}}_1 \bar{a}_1 - \bar{\bar{\varphi}}_3 \bar{c}_1\right)},$$

where the boundary coefficients can be calculated as follows:

$$\alpha_{x,0} = \frac{(\varphi_2 c_1 - \varphi_3 c_1)}{(a_1 \varphi_1 - \varphi_3 c_1)}; \quad \beta_{x,0} = \frac{\varphi_3 f_1}{a_1} + (1 - \delta_1) P_c.$$

Here:

$$\bar{\varphi}_1 = (1 - \delta_3) \frac{3\delta_3}{2h_x}; \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{2\delta_3}{h_x}; \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{\delta_3}{2h_x}.$$

For condition

$$(1 - \delta_4) \left(P_l \Big|_{y=1} - P_c \right) + \delta_4 \left(\frac{\partial P_l}{\partial x} \Big|_{y=1} \right) = 0$$

we get

$$\begin{aligned} (1 - \delta_4) (P_{l,J} - P_c) + \delta_4 \left(\frac{3P_{l,J} - 4P_{l,J-1} + P_{l,J-2}}{2h_y} \right) &= 0; \\ \left((1 - \delta_4) + \frac{3\delta_4}{2h_y} \right) P_{l,J} - \frac{2\delta_4}{h_y} P_{l,J-1} + \frac{\delta_4}{2h_y} P_{l,J-2} &= (1 - \delta_4) P_c; \\ \bar{\varphi}_1 P_{l,J} - \bar{\varphi}_2 P_{l,J-1} + \bar{\varphi}_3 (\alpha_{y,J-2} P_{l,J-1} + \beta_{y,J-1}) &= (1 - \delta_4) P_c; \\ \bar{\varphi}_1 P_{l,J} - \left(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{y,J-2} \right) P_{l,J-1} + \bar{\varphi}_3 \beta_{y,J-1} &= (1 - \delta_4) P_c; \\ \bar{\varphi}_1 P_{l,J} - \left(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_3 \alpha_{y,J-2} \right) (\alpha_{y,J-2} P_{l,J-1} + \beta_{y,J-1}) + \\ &+ \bar{\varphi}_3 \beta_{y,J-1} = (1 - \delta_4) P_c; \end{aligned}$$

References

- [1] Monteiro P.J., Rycroft Ch.H., Barenblatt G.I. A mathematical model of fluid and gas flow in nanoporous media // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 2012. – Vol. 109. – № 50. – Pp. 20309-20313.
- [2] Barenblatt G.I., Patzek T.W., Slin D.B. The mathematical model of nonequilibrium effects in water-oil displacement // Society of Petroleum Engineers Journal. – 2003. – Vol. 8. – № 4. – Pp. 409-416.
- [3] Chraibi M., Zaleski S., Franco F. Modeling the solution gas drive process in heavy oils // Записки Горного института.– Санкт-Петербург, 2008. – Т. 174. – С. 36–40.
- [4] Шелухин В.В. Задача капиллярного вытеснения для одной модели трехфазной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск, 2003. – Т. 44, № 6. – С. 95-106.
- [5] Atkinson C., Isangulov R. A mathematical model of an oil and gas field development process // European Journal of Applied Mathematics. – UK, 2010. – Vol. 21. – Issue 3. – Pp. 205-227.
- [6] Ахметзянов А.Б., Ибрагимов И.И., Ярошенко Е.А. Интегрированные гидродинамические модели при разработке нефтяных месторождений // Управление большими системами: сборник трудов. – М., 2010. – № 29. – С. 167-183.
- [7] Ахмед-Заки Д.Ж. Об одной задаче двухфазной фильтрации смеси в пористой среде с учетом теплового воздействия // Научные труды НИПИ Нефтегаз. – Баку, 2010. – № 3. – С. 29-33.
- [8] Даuletbaev А.Я. Фильтрация жидкости в пористой среде со скважинами с вертикальной трещиной гидроразрыва пласта // Инженерно-физический журнал. – Минск, 2012. – Т. 85, № 5. – С. 919-924.
- [9] Демьянов А.Ю., Динариев О.Ю., Иванов Е.Н. Моделирование переноса воды с мелкодисперсной газовой фазой в пористых средах // Инженерно-физический журнал. – Минск, 2012. – Т. 85, № 6. – С. 1145-1154.
- [10] Абуталиев Ф.Б. Эффективные приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации. – Ташкент: «Фан» УзССР, 1978. - 235 с.
- [11] Равшанов Н., Курбонов Н.М. Компьютерное моделирование процесса фильтрации флюидов в пористых средах // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – Челябинск, 2015. – Т. 4, № 2. - С. 89–106.

$$\begin{aligned} &\left(\bar{\bar{\varphi}}_1 - \left(\bar{\bar{\varphi}}_2 - \bar{\bar{\varphi}}_3 \alpha_{y,N-2} \right) \alpha_{y,J-1} \right) P_{l,J} = \\ &= \left(\bar{\bar{\varphi}}_2 - \bar{\bar{\varphi}}_3 \alpha_{y,J-2} \right) \alpha_{y,J-1} - \bar{\bar{\varphi}}_3 \beta_{y,J-1} + (1 - \delta_4) P_c. \end{aligned}$$

Here

$$\bar{\varphi}_1 = (1 - \delta_4) \frac{3\delta_4}{2h_x}; \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{2\delta_4}{h_x}; \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{\delta_4}{2h_x}.$$

From this $P_{l,J}$ can be determined by:

$$P_{l,J} = \frac{\left(\bar{\bar{\varphi}}_2 - \bar{\bar{\varphi}}_3 \alpha_{y,J-2} \right) \alpha_{y,J-1} - \bar{\bar{\varphi}}_3 \beta_{y,J-1} + (1 - \delta_4) P_c}{\left(\bar{\bar{\varphi}}_1 - \left(\bar{\bar{\varphi}}_2 - \bar{\bar{\varphi}}_3 \alpha_{y,J-2} \right) \alpha_{y,J-1} \right)}.$$

3. Conclusion

A mathematical model is developed for the solution of the problem, describing the dynamic process of filtration medium with complex components in a heterogeneous porous medium, which takes into account the interaction between well-permeable layers with poorly permeable layers with conjugation conditions.

To solve the problem nonlinear terms of equations describing the process are linearized, and a numerical algorithm based on the splitting the coordinate variables is developed.

The developed mathematical software of the process can be used for numerical calculations on a computer with the purpose of analysis, forecasting, decision-making for the development and projecting of oil-gas fields under various conditions of influence on the formation and adoption of specific practical recommendations, depending on the hydrogeological and geophysical properties of porous medium.

- [12] Курбонов Н.М. Математическая модель и программа расчёта для процессов проектирования и разработки углеводородных месторождений // Вестник ТУИТ. – Ташкент, 2014. – № 4. – С. 56-61
- [13] Ravshanov N., Abilkasimov B., Kurbonov N. The Model and Numerical Algorith, to Research the Filtration processes in porous media taking into account the phase transitions of multicomponent mixtures// International Multidisciplinary Journal European researcher. – 2012. – № 1(16). – Pp. 5-11.

УДК 622.692.4

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ТРУБОПРОВОДЕ С ДЕМПФЕРОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ

Хужаев И.К.

д.т.н., ведущий научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99890) 349-70-61, e-mail: hujayev_i_k@mail.ru

Мамадалиев Х.А.

старший научный сотрудник Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий,
тел.: +(99893) 597-69-17, e-mail: husniddin_m1@bk.ru

С учетом сил трения и гравитации, локальной составляющей силы инерции получено аналитическое решение задачи о распространении возмущений давления и скорости жидкости на элементарном участке трубопровода с воздушным колпаком при полном или частичном прекращении отбора. Учет воздушного колпака произведен по И.А.Чарному. Уравнения относительно статического давления и скорости потока, построенные из уравнений Н.Е.Жуковского, решены методом распределения переменных для смешанных граничных условий. На основе полученного решения проведен вычислительный эксперимент, результаты которого позволили выявить особенности сглаживания (преобразования) возмущений давления и скорости в зависимости от различных параметров, в том числе от объема воздушного колпака.

Ключевые слова: трубопровод, отбор жидкости, распространение возмущений, математическое моделирование, воздушный колпак, телеграфное уравнение, метод разделения переменных, вычислительный эксперимент.

QUASI ONE-DIMENSIONAL MODEL AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF WAVE PROPAGATION IN THE PIPELINE WITH A DAMPER OF PRESSURE DISTURBANCES

Hujaev I.K., Mamadaliev H.A.

With the account of the forces of friction and gravity, the local component of the force of inertia, an analytical solution of the problem of the distribution of pressure and fluid velocity perturbations at the elementary section of the pipeline with the air chamber is obtained, with full or partial termination of the selection. The account of the air chamber is done according to I.A.Charniy. The equations of the static pressure and flow rate, built due to N.E.Zhukovsky equations are solved by variable distribution method for mixed boundary conditions. On the basis of the solution a computational experiment carried out, the results of which revealed the features of smoothing (conversion) the pressure disturbances and speed depending on various parameters, including the volume of the air chamber.

Keywords: pipeline, fluid consumption, propagation of disturbances, mathematical modeling, air chamber, telegraph equation, variable distribution method, computing experiment.

BOSIM QO‘ZG‘ALISHLARI SO‘NDIRUVCHISI ULANGAN QUVURDA TO‘LQIN TARQALISHI MASALASINING MATEMATIK MODELI VA ANALITIK YECHIMI

Xo’jaev I.Q., Mamadaliyev X.A.

Qarshilik va og‘irlik kuchlari hamda inertsiya kuchining lokal tashkil etuvchisi hisobga olinganda havoli qo‘sishimcha hajm ulangan qiya quvurda suyuqlik olishning to‘la yoki qisman to‘xtatilishi tufayli hosil bo‘lgan bosim va tezlik qo‘zg‘alishlari tarqalishi masalasining analitik echimi olingan. Quvur oxiriga ulangan havoli qo‘sishimcha hajm I.A.Charniy taklif etgan usulda hisobga olingan. N.E.Jukovskiy tenglamalari asosida qurilgan bosim va tezlikka nisbatan alohida tenglamalar aralash chegaraviy shartlar uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usulida echilgan. Olingan echim asosida o‘tkazilgan sonli tajriba bosim va tezlik qo‘zg‘alishlarining havoli hajmning kattaligi va boshqa turli omillardan bog‘liq holda so‘nishi xususiyatlarini o‘rganish imkonini berdi.

Tayanch iboralar: quvur, suyuqlik olinishi, qo‘zg‘alishlar tarqalishi, matematik modellashtirish, havoli qo‘sishimcha hajm, telegraf tenglamasi, ozgaruvchilarni ajratish usuli, sonli tajriba.

1. Введение

Как показали результаты работы [1], при отключении потребителя в конце участка горизонтального и наклонного с малым уклоном трубопроводов на данном участке ожидается чрезмерное увеличение давления. При больших положительных уклонах трубопровода, особенно в случае направленного вертикально вверх исходного потока, торможение потока приводит к большим скачкам давления в нижнем конце участка.

Продолжив тему работы [1], в настоящей статье рассматриваем задачу о распространении возмущений давления и скорости потока в наклонном трубопроводе, к концу которого подключен воздушный колпак.

Математическая модель построена на основе материалов работ [1-3]. При этом полагали, что путевое и временное изменения давления связаны локальной составляющей силы инерции, силами сопротивления и гравитации. Полученные относительно давления и скорости потока уравнения линеаризованы по И.А. Чарному и решены методом разделения переменных.

Полученные результаты позволили изучить роль воздушного колпака при гашении возмущений давления и скорости потока.

2. Постановка задачи

Система квазидномерных уравнений сохранения импульса и массы малосжимаемой жидкости ($\rho \approx const$) по наклонному трубопроводу имеет вид [1-3]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw + g \frac{dy}{dx} \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $p(x, t)$, $w(x, t)$ – статическое давление и скорость жидкости на расстоянии x от входа в участок в момент времени t ; g – ускорение силы тяжести; $a = \lambda w_* / (4D) = const$; $y(x)$ – нивелирная высота оси трубопровода (в рамках работы принимается $\frac{dy}{dx} = \sin \alpha = const$); w_* – характеристическая для рассматриваемого процесса скорость; ρ – плотность жидкости.

Скорость малых возмущений давления в системе труба-жидкость в [4] определена формулой

$$c^2 = \left(\frac{\rho_0}{k} + \frac{D\rho_0}{E\delta} \right)^{-1},$$

где ρ_0 и D – плотность жидкости и диаметр трубопровода без возмущений давления; k , E – модули упругости транспортируемой жидкостью среды и материала трубы; δ – толщина трубы.

Задача решается для действующего трубопровода. Исходная скорость потока принимается равной w_0 . Исходя из этого,

определен начальное распределение давления по трубопроводу согласно первому уравнению системы (1) и сформированы начальные условия:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad w &= w_0, \\ p(x, 0) &= p_{00} - 2a\rho w_0 x - \rho g \sin \alpha x. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $p_{00} = p(0, 0)$.

Границочное условие на входе трубопровода принимается в виде

$$p(0, t) = p_{00}. \quad (3)$$

Считается, что на выходе из участка с длиной l задан объемный расход жидкости $Q = Q(t)$. К концу участка подключен воздушный колпак, в котором средние объем и давления воздуха составляют V_0 , p_0 . Через y обозначено увеличение объема жидкости (уменьшение объема воздуха) в воздушном колпаке по времени.

Баланс объема жидкости в воздушном колпаке описываем в виде

$$\frac{dy}{dt} = (f w)_{x=l} - Q(t).$$

Здесь $f = \pi D^2 / 4$ – площадь поперечного сечения трубопровода; $(f w)_{x=l}$ – объемный расход жидкости, втекшей в колпак.

Принимается, что воздух в колпаке сжимается изотермически. Тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона следует равенство

$$p_0 V_0 = p(V_0 - y).$$

Отсюда находим значение давления на выходе из колпака:

$$p = \frac{p_0 V_0}{V_0 - y}.$$

Полагая $V_0 \gg y$, при $p = p_0 \frac{1}{1 - y/V_0}$, получаем

$$p \approx p_0 (1 + y/V_0).$$

Отсюда можно найти, что $y = \frac{p - p_0}{p_0} V_0$ и

$$\frac{dy}{dt} = \frac{V_0}{p_0} \frac{dp}{dt}.$$

С другой стороны, согласно второму уравнению системы (1), изменение давления создает определенный градиент скорости в трубопроводе:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x},$$

из чего для конца трубопровода следует условие

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\rho c^2 V_0}{p_0} \frac{\partial w(l, t)}{\partial x}.$$

В связи с этим уравнение баланса массы на выходе из трубопровода приобретает вид

$$-\frac{\rho c^2 V_0}{p_0} \frac{\partial w(l, t)}{\partial t} = f w(l, t) - Q(t). \quad (4)$$

Рассматривается вариант $Q(t)$, когда скорость потока в конце трубопровода при $t = 0$ мгновенно переходит из w_0 на A : $Q(t) = f A$ при $t > 0$. При

этом значение давления p_{00} на входе в трубопровод остается постоянным.

Без воздушного колпака (т.е. при $V_0 = 0$) условие (4) следует брать в виде $w(l, t) = A$ [1].

В целом, такая постановка задачи отличается от [1, 2] тем, что здесь дополнительно учитывается наличие воздушного колпака, исходное и последующее распределение давления под влиянием постоянного уклона трубопровода с коэффициентом $\sin \alpha$.

3. Метод решения

Сначала решается задача относительно скорости потока $w(x, t)$, для чего и формируем краевые условия.

Исходная скорость потока полагается постоянной: $w(x, t) = w_0$, и так она сохранялась до момента времени $t = 0$. Поэтому можем принять

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

На входе в участок поддерживается постоянное по времени значение давления: $\frac{\partial p(0, t)}{\partial t} = 0$. Тогда, согласно второму уравнению системы (1), можно принять $\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0$.

С учетом (4) краевые условия имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} w(x, 0) = w_0, \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \beta \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} + w(l, t) = A, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где $\beta = \frac{\rho c^2 V_0}{fp_0}$ (> 0).

Перекрестным дифференцированием уравнений системы (1) составляется уравнение относительно скорости потока жидкости:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

В задаче (5) и (6) граничные условия представляются в однородном виде, для чего вводится новая искомая

$$u(x, t) = w(x, t) - A. \quad (7)$$

Краевые условия (5) преобразуются:

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = w_0 - A, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + u(l, t) = 0. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Уравнение остается без изменения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Для решения задачи (8)-(9) будем применять метод разделения переменных [4,5].

Полагаем, что

$$u(x, t) = T(t)X(x).$$

Тогда уравнение (9) принимает вид

$$T''(t)X(x) + 2aT'(t)X_n(x) = c^2 T(t)X_n''(x).$$

Отсюда составляются автономные уравнения относительно искомых:

$$\frac{T''(t) + 2aT'(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 < 0.$$

Для $X(x)$ уравнение имеет вид

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Такое возможно, если функция $X(x)$ представляет синус и косинус аргумента λx .

Условиями для $X(x)$, согласно последним двум условиям из (8), будут

$$X'(0) = 0, X'(l) + \beta X(l) = 0.$$

Решение ищется в виде

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Тогда граничные условия принимают вид:

$$\left. \begin{array}{l} A\lambda \cos 0 - B\lambda \sin 0 = 0, \\ \beta A\lambda \cos \lambda l - \beta B\lambda \sin \lambda l + \\ + A \sin \lambda l + B \cos \lambda l = 0. \end{array} \right.$$

Из первого уравнения следует, что $A = 0$ ($\lambda \neq 0$).

Тогда из второго уравнения при $B \neq 0$ получаем

$$-\lambda \beta \sin \lambda l + \cos \lambda l = 0.$$

Отсюда составляется уравнение относительно собственного числа λ задачи

$$\operatorname{tg} \lambda l = 1/(\beta \lambda).$$

Представив $\operatorname{tg} \lambda l$ и $1/(\beta \lambda)$ в первом квадранте координатной плоскости (λ, y) , убедимся, что уравнение имеет счетное количество решений и при $\lambda > 0$ возрастающие его значения составляют последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$

Таким образом, собственными функциями задачи по x есть $X_n(x) = \cos \lambda_n x$, где λ_n – положительные решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = 1/(\beta \lambda_n).$$

Следует отметить, что при $V_0 \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 0$) уравнение относительно собственных чисел принимает вид $\cos \lambda_n l = 0$. С учетом $X_n'(0) = 0$ собственными функциями будут служить

$$X_n(x) = \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \text{ при } \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} [1,5].$$

Доказана ортонормированность собственных функций задачи (8)-(9) по x :

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (l + \beta \sin^2 \lambda_n l) & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Сравнение со случаем $\beta = 0$ показало, что в данном представлении квадрат нормы уместен для случаев как при $\beta = 0$, так и при $\beta \neq 0$.

Так как собственные числа λ_n известны, можно приступить к нахождению собственных функций по t из уравнения

$$T_n'(t) + 2aT_n(t) + c^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0.$$

Составляется характеристическое уравнение

$$s_n^2 + 2as_n + c^2\lambda_n^2 = 0.$$

В зависимости от значения четвертой части дискриминанта $\mathfrak{D}_n = a^2 - c^2\lambda_n^2$ корнями характеристического уравнения будут

$$(s_n)_{1,2} = -a \pm \sqrt{\mathfrak{D}_n}.$$

Ожидается три варианта решения $T_n(t)$ [1,4]:

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at}(A_n ch\sqrt{\mathfrak{D}_n}t + B_n sh\sqrt{\mathfrak{D}_n}t) & \text{при } \mathfrak{D}_n > 0, \\ e^{-at}(A_n + B_n t) & \text{при } \mathfrak{D}_n = 0, \\ e^{-at}(A_n \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t + B_n \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t) & \text{при } \mathfrak{D}_n < 0. \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче a , c и λ_n имеют положительные значения, поэтому условия $\mathfrak{D}_n > 0$, $\mathfrak{D}_n = 0$ и $\mathfrak{D}_n < 0$ можно заменить на равносильные условия $a > c\lambda_n$, $a = c\lambda_n$ и $a < c\lambda_n$, чем и пользуемся далее.

Таким образом, получено решение задачи (8)-(9):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} e^{-at}(A_n ch\sqrt{\mathfrak{D}_n}t + B_n sh\sqrt{\mathfrak{D}_n}t) & \text{при } a > c\lambda_n, \\ e^{-at}(A_n + B_n t) & \text{при } a = c\lambda_n, \\ e^{-at}(A_n \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t + B_n \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t) & \text{при } a < c\lambda_n \end{cases} \cos \lambda_n x.$$

По формуле (7) осуществляется обратный переход к скорости $w(x,t)$:

$$\begin{aligned} w(x,t) = A + u(x,t) = A + \\ + e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} A_n ch\sqrt{\mathfrak{D}_n}t + B_n sh\sqrt{\mathfrak{D}_n}t & \text{при } a > c\lambda_n, \\ A_n + B_n t & \text{при } a = c\lambda_n, \\ A_n \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t + B_n \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t & \text{при } a < c\lambda_n \end{cases} \cos \lambda_n x. \end{aligned}$$

Находим значения коэффициентов A_n и B_n .

Согласно первому условию из (5), имеем

$$w_0 - A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x.$$

Предварительно умножив обе стороны последнего равенства на $\cos \lambda_n x dx$, интегрируем по x от 0 до l . С учетом ортонормированности собственных функций получаем

$$(w_0 - A) \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n} = A_n \|X_n\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$A_n = \frac{w_0 - A}{\lambda_n \|X_n\|^2} \sin \lambda_n l.$$

Обратимся ко второму условию из (5). Согласно полученному решению, его можно представить в виде $\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = 0$. Так как $X_n(x) \neq 0$, то должно быть $T_n'(0) = 0$.

Из условия $T_n'(0) = 0$ следует

$$B_n = \frac{a}{\gamma_m} A_n = \frac{a}{\gamma_m} \frac{(w_0 - A)}{\lambda_n \|X_n\|^2} \sin \lambda_n l.$$

Здесь пользовались обозначением

$$\gamma_m = \begin{cases} \sqrt{\mathfrak{D}_n} & \text{при } a > c\lambda_n, \\ 1 & \text{при } a = c\lambda_n, \\ \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} & \text{при } a < c\lambda_n. \end{cases}$$

В связи с этим решение относительно скорости потока приобретает более простой вид:

$$w(x,t) = A + (w_0 - A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n \|X_n\|^2} \times$$

$$\times \begin{cases} e^{-at} \left(ch\sqrt{\mathfrak{D}_n}t + \frac{a}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} sh\sqrt{\mathfrak{D}_n}t \right) & \text{при } a > c\lambda_n, \\ e^{-at}(1+at) & \text{при } a = c\lambda_n, \\ e^{-at} \left(\cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t + \frac{a}{\sqrt{|\mathfrak{D}_n|}} \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|}t \right) & \text{при } a < c\lambda_n \end{cases} \cos \lambda_n x.$$

Приступим к решению задачи относительно давления $p(x,t)$. К сожалению, переход к единому уравнению относительно давления $p(x,t)$ типа (6) не удалось, так как условие (4) не могли представить через $p(x,t)$ в простых выражениях. Поэтому обратились к уравнениям системы (1), где $w(x,t)$ считали заданной функцией.

При интегрировании первого уравнения системы (1) по длине x с граничным условием $p(0,t) = p_{00}$ получили решение, которое позволило построить графики давления. Но, оказалось, что в таком решении переход динамического давления жидкости на статическое, при торможении потока, выражался в недостаточной мере. Поэтому следующая попытка проводится интегрированием второго уравнения системы (1) по t :

$$p(x,t) = p(x,0) - \rho c^2 \int_0^t \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dt. \quad (10)$$

Значение давления при $t = 0$ определяется вторым условием из (2).

Прежде чем приступить к интегрированию, сначала дифференцируем $w(x,t)$ по x . Для облегчения записи представим $w(x,t)$ в виде

$$w(x,t) = A + (w_0 - A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n \|X_n\|^2} \tilde{T}_n^{(k)}(t) X_n(x).$$

Сначала выполним дифференцирование:

$$\tilde{T}_n'(x) = -\lambda_n \sin \lambda_n x.$$

Переходим к интегрированию.

При $k = 1$ имеем

$$\tilde{T}_n^{(k)}(t) = e^{-at} \left(ch\sqrt{\mathfrak{D}_n}t + \frac{a}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} sh\sqrt{\mathfrak{D}_n}t \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{a}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} \right) e^{(-a+\sqrt{\mathfrak{D}_n})t} + \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} \right) e^{(-a-\sqrt{\mathfrak{D}_n})t} \right].$$

Поэтому искомый интеграл имеет следующий вид:

$$\int_0^t \tilde{T}_n^{(k)}(t) dt = \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} \left[-2a \left(e^{-at} ch \sqrt{\mathfrak{D}_n} t - 1 \right) + \left(-\sqrt{\mathfrak{D}_n} - \frac{a^2}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} \right) e^{-at} sh \sqrt{\mathfrak{D}_n} t \right].$$

Здесь использовали тождество $a^2 - \mathfrak{D}_n = c^2 \lambda_n^2$ при $\mathfrak{D}_n > 0$.

При $k = 2$ имеем

$$\tilde{T}_n^{(2)}(t) = -e^{-at} (1 + at).$$

Значением интеграла будет

$$\int_0^t \tilde{T}_n^{(2)}(t) dt = \frac{-2a(e^{-at} - 1) - a^2 te^{-at}}{c^2 \lambda_n^2}.$$

Здесь использовали равенство $a^2 = c^2 \lambda_n^2$, которое вытекает из $\mathfrak{D}_n = 0$.

И при $k = 3$ имеем

$$\tilde{T}_n^{(3)}(t) = e^{-at} \left(\cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t + \frac{a}{\sqrt{|\mathfrak{D}_n|}} \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t \right).$$

Интегрируя, получаем

$$\int_0^t \tilde{T}_n^{(3)}(t) dt = \frac{1}{c^2 \lambda_n^2} \left[-2a \left(e^{-at} \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t - 1 \right) + \left(\sqrt{|\mathfrak{D}_n|} - \frac{a^2}{\sqrt{|\mathfrak{D}_n|}} \right) e^{-at} \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t \right].$$

Здесь, учитывая $\mathfrak{D}_n > 0$, использовали равенство $a^2 + |\mathfrak{D}_n| = c^2 \lambda_n^2$.

Подстановка этих интегралов приводит к следующему:

$$\int_0^t \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} dt = \frac{(w_0 - A)}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n^2 \|X_n\|^2} \times \begin{cases} -2a \left(e^{-at} ch \sqrt{\mathfrak{D}_n} t - 1 \right) + \\ \left(-\sqrt{\mathfrak{D}_n} - \frac{a^2}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} \right) e^{-at} sh \sqrt{\mathfrak{D}_n} t \\ \text{при } a > c\lambda_n, \\ -2a \left(e^{-at} - 1 \right) - a^2 te^{-at} \text{ при } a = c\lambda_n, \\ -2a \left(e^{-at} \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t - 1 \right) + \\ \left(\sqrt{|\mathfrak{D}_n|} - \frac{a^2}{\sqrt{|\mathfrak{D}_n|}} \right) e^{-at} \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t \\ \text{при } a < c\lambda_n \end{cases}$$

Подстановка его в (10) и последующее упрощение дают

$$p(x, t) = p_{00} - \rho g \sin \alpha x - 2\rho a A x +$$

$$+ \rho(w_0 - A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n^2 \|X_n\|^2} \times \begin{cases} -2a \left(e^{-at} ch \sqrt{\mathfrak{D}_n} t - 1 \right) + \\ \left(-\sqrt{\mathfrak{D}_n} - \frac{a^2}{\sqrt{\mathfrak{D}_n}} \right) e^{-at} sh \sqrt{\mathfrak{D}_n} t \\ \text{при } a > c\lambda_n, \\ -2a \left(e^{-at} - 1 \right) - a^2 te^{-at} \text{ при } a = c\lambda_n, \\ -2a \left(e^{-at} \cos \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t - 1 \right) + \\ \left(\sqrt{|\mathfrak{D}_n|} - \frac{a^2}{\sqrt{|\mathfrak{D}_n|}} \right) e^{-at} \sin \sqrt{|\mathfrak{D}_n|} t \\ \text{при } a < c\lambda_n \end{cases}$$

Сравнение с решением, которое было получено при интегрировании первого уравнения системы (1), показывает, что слагаемые под суммой, которые не зависят от t , выпадали при вычислении производной $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$. Поэтому результат при интегрировании первого уравнения системы (1) получился не полный.

Остановимся на нахождении значений собственных чисел λ_n .

Значения собственных чисел λ_n при $\beta = 0$ приведены выше.

При $\beta \neq 0$ значения собственных чисел получены решением трансцендентного векового уравнения. Для этой цели сначала выделили границу промежутка принадлежности n -го корня $(n-1) < \lambda_n l \leq (n-0.5)\pi$, далее для этого промежутка применяли метод дихотомии [6]. Ограничились первыми 36 шагами приближения, что обеспечивает точность 10^{-8} при определении λ_n для длины участка $l = 1000.0$ м.

4. Обсуждение результатов

Расчеты проводились согласно данным из [1]: $D = 0.200$ м, $\lambda = 0.018$, $c = 1200.0$ м/с, $w_* = w_0 = 12.0$ м/с. Шаг по времени составил $l/(4c)$. Число членов разложения составило 500.

На рис. 1 приведены графики скорости потока через каждый второй отрезок $l/(4c)$ для длины горизонтального участка 1 км при $\sin \alpha = -1$, $\lambda = 0.0001$ м³.

Торможение, совершенное при $t = 0$, приводит к образованию волны уплотнения, которая начинает перемещаться против движения потока, достигает левого конца участка при l/c , составляя монотонно убывающую линию. После достижения начала участка кривая скорости переворачивается. Если в промежутке $(0; l/c)$ кривые имели части: не достигшая фронтом уплотнения, сам скачок уплотнения и часть последствия волны уплотнения,

то при $(l/c; 2l/c)$ имеет место обратная картина. Если в первом промежутке кривые $w = w_0$ и $w = w(x, l/c)$ составили визуальные огибающие кривые скорости, то в промежутке $(l/c; 2l/c)$ визуальными огибающими случаями являются $w = w(x, l/c)$ и $w = w(x, 2l/c)$.

Первая и последующие визуальные огибающие образовались под влиянием силы трения, что обусловлено множителем e^{-at} . Слово «визуальная» относительно огибающих использовали в связи тем,

что они служат в качестве кажущейся огибающей, но не самой огибающей. Это объясняется тем, что при больших длинах участка они, кроме первой огибающей ($w = w_0$), отходят друг от друга.

Если первая огибающая составляла $w(x, 0) = w_0 = \text{const}$, то вторая визуальная огибающая будет убывающей, третья визуальная огибающая $w(x, 2l/c)$ – возрастающей и т.д. Все они проходят через точку $(l; 0)$. Предельный их переход соответствует $w(x, nl/c) = 0$ – состоянию потока.

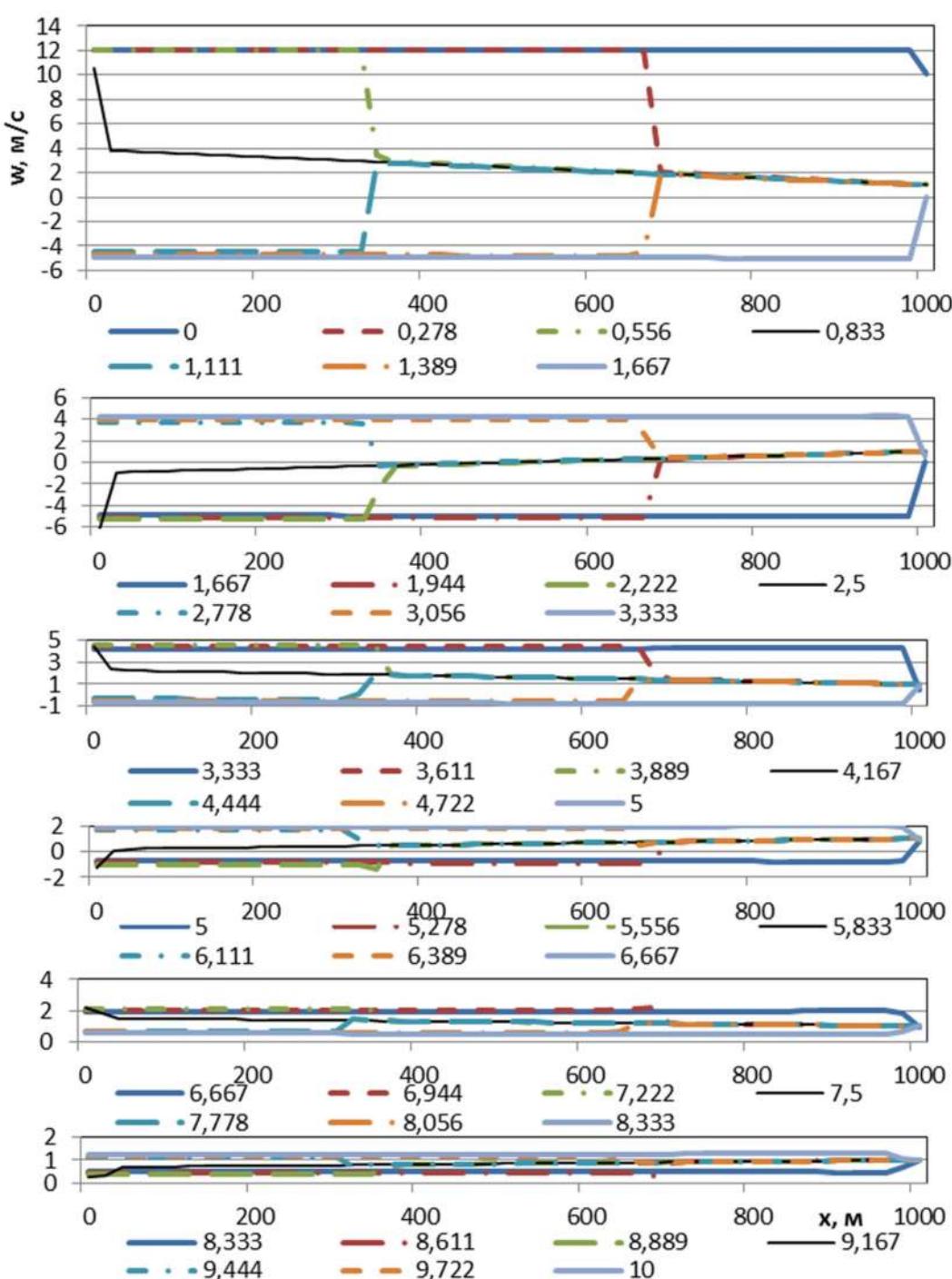


Рис. 1. Изменение средней скорости потока жидкости при $L = 1000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.0001 \text{ м}^3$

То, что огибающие кажущиеся (кроме исходного распределения скорости), более ярко проявляется в кривых давления (рис. 2).

Нижняя действительная огибающая соответствует кривой давления $p(x, 0)$. Скачок уплотнения, образованный торможением потока, продвигается против потока и при $t = l/c$ достигает левого конца участка. Скачок давления, в отличие от скачка скорости, не переворачивается и в таком же

порядке возвращается назад. Отражение волны давления в концах участка связано с переходом кинетической энергии к упругой деформации жидкости и стенки трубопровода и обратным переходом к кинетической энергии. Кажущиеся вторая и третья огибающие соответственно будут возрастающие и убывающие, которые проходят через точку $(0, p_0)$. С истечением времени они стремятся к состоянию покоя.

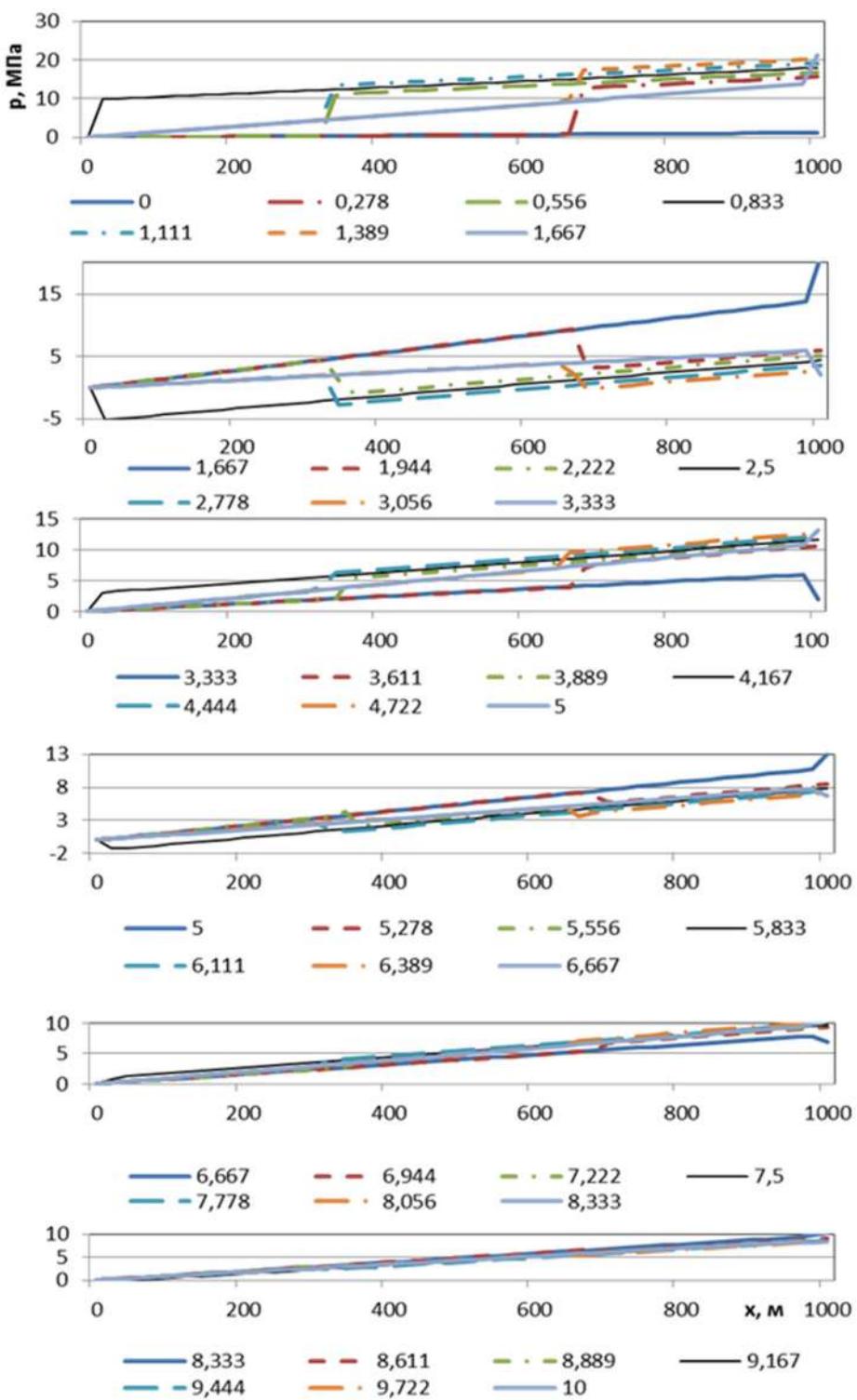


Рис. 2. Динамика избыточного статистического давления на элементарном участке при $L = 1000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.0001 \text{ м}^3$

С удлинением участка огибающие отходят от своих составляющих. Кривые скорости будут близки кривым, которые получаются при решении задачи теплопроводности с условием второго рода при $x=0$ и первого рода при $x=l$. Количество видимых скачков уменьшается с удлинением участка. Например, при длине $l=10$ км отраженная в правом конце волна скорости достигает левого конца со значением ~ 11 м/с. А при $t \geq 2l/c$ они визуально не наблюдаются. Такая же картина наблюдается для кривых давления.

С сокращением длины участка количество видимых отражений увеличивается.

Такие факты служат в пользу достоверности полученных результатов, так как существует градация трубопроводов на «длинные» и «короткие»,

где преобладают силы трения и инерции соответственно [2, 3].

При данной длине участка динамика средней скорости потока оставалась практически одинаковой. Но с увеличением объема воздушного колпака существенные изменения претерпевали кривые давления в соответствующих временных интервалах.

На рис. 3 представлены изменения давления при $V_0 = 0.1 \text{ m}^3$ и $L = 1000 \text{ м}$ для горизонтального трубопровода. В отличие от рис. 5 из [1], в этом случае максимальное давление, достигаемое при $t \rightarrow l/c$, практически на порядок уменьшается. Трехзвенность кривых давления так же не наблюдается. Кривые строго ограничены между двумя кривыми давления: снизу $p(x, 0)$, сверху $p(x, l/c)$.

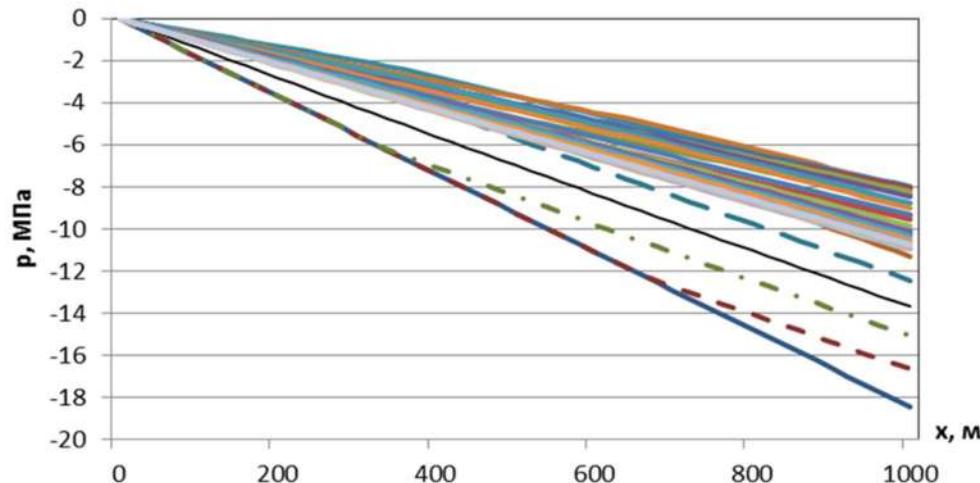


Рис. 3. Изменение избыточного статистического давления в связи с торможением жидкости в конце участка с длиной $L = 1000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = 0.0$, $V_0 = 0.1 \text{ м}^3$

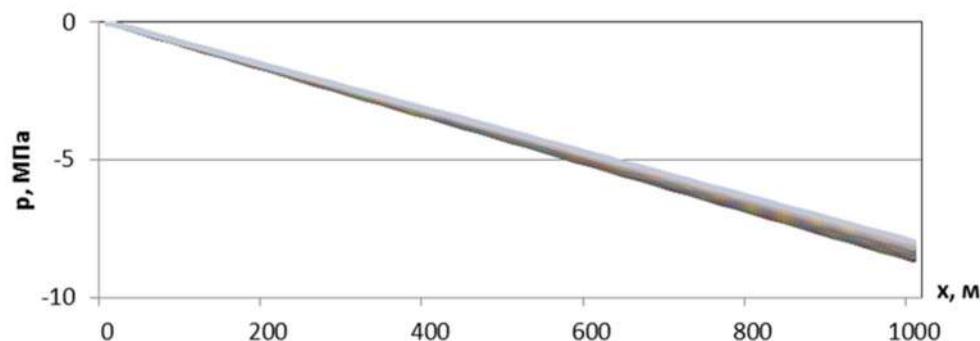


Рис. 4. Изменение избыточного давления, если к концу участка подключен воздушный колпак с объемом 10 м^3 , $\sin \alpha = 0.0$, $L = 1000.0 \text{ м}$

Как и в случае с удлинением участка, в этом случае также наблюдали своеобразный переход из параболичности решения к гиперболичности в связи с увеличением объема воздушного колпака. При средних значениях V_0 перед нырком (или скачком верх) в кривых давления образовались выпуклости (или вогнутости) в кривых.

Как видно, с увеличением значения параметра β (т.е. V_0) части кривых, соответствующие скачку и после скачка, сливаются и составляют единую более гладкую кривую. Для примера представим кривые скорости и давления, полученные при $V_0 = 10 \text{ м}^3$ (рис. 4). Кривые скорости по времени располагаются сверху вниз (не пересекаясь), а кривые давления

располагаются между двумя огибающими вокруг прямой

$$p(x, t) = p_{00} - 2a\rho w_0 x,$$

которые располагались достаточно близко.

Выявлено, что для горизонтального трубопровода со средней длиной подключение воздушного колпака при малых его объемах приводит к сглаживанию скачка, а увеличение объема воздушного колпака – к уменьшению амплитуды скачков скорости и

давления. Чрезмерное увеличение объема воздушного колпака приводит к быстрому переходу к состоянию потока так, что интервал изменения давления по времени стремится к нулю (см. рис. 4). Предельное состояние для скорости соответствует покоя, а для давления – распределению, согласно законам сопротивления и гравитации.

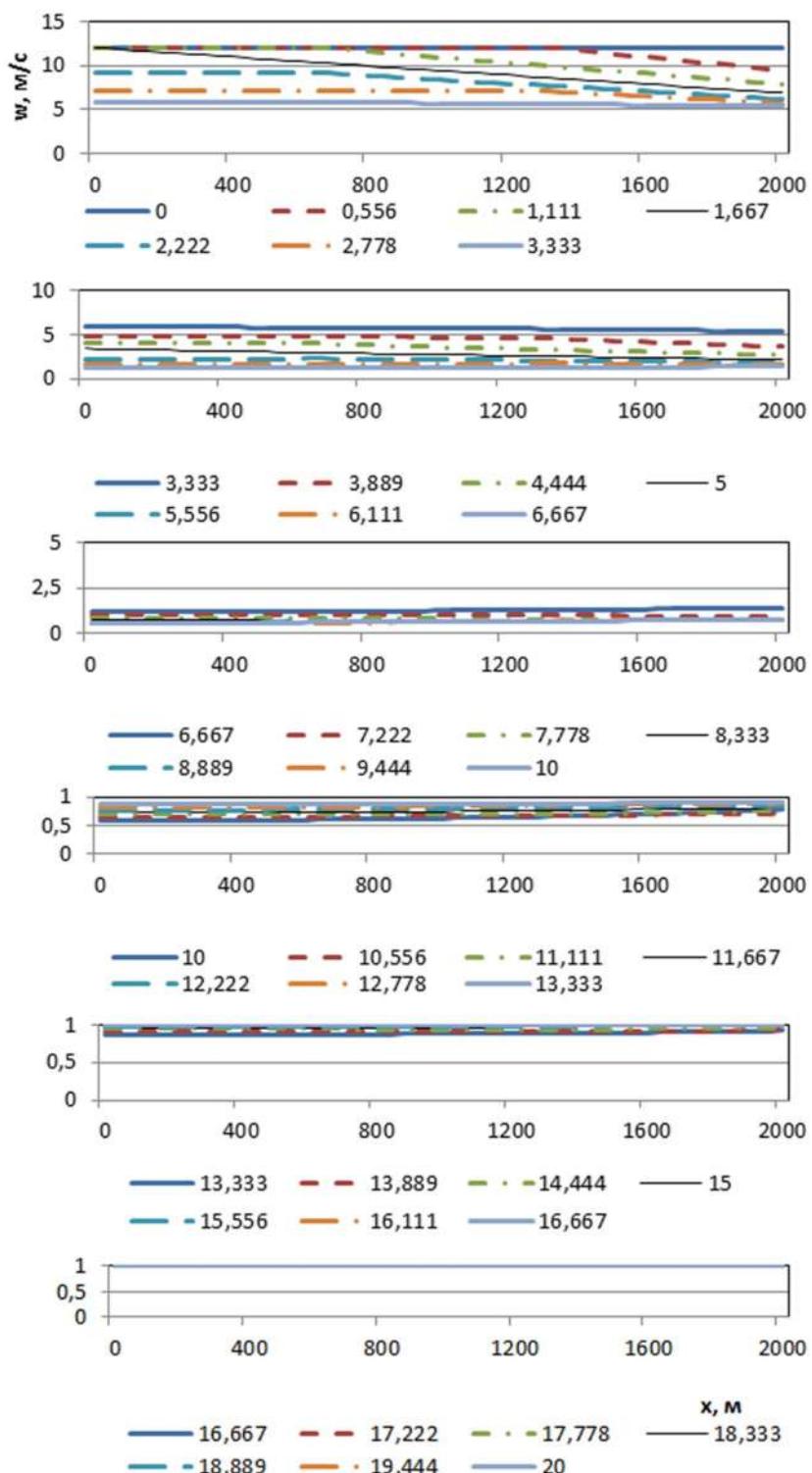


Рис. 5. Кривые средней скорости потока жидкости, полученные при $L = 2000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.1 \text{ м}^3$

Если при $\sin \alpha = 0$ наибольшее значение давления ожидается после $t = 2l/c$, то при $\sin \alpha = 1$ такое имеет место при $t \rightarrow l/c$. С этим весомым для практики утверждением начинаем анализ результатов, полученных при торможении потока, направленного вертикально вверх. Результаты по динамике скорости потока, полученные для горизонтального трубопровода, повторялись качественно для вертикального трубопровода в рамках точности машинных вычислений. Поэтому

основное внимание будем уделять изменению давления.

Этот случай транспортировки жидкостей требует большой энергии в виде повышенного давления, так как придется вложить дополнительное усилие на преодоление силы гравитации. Обратное падение торможенной жидкости к плоскости $x = 0$ приводит к увеличению давления до 10 МПа как в силу возвращения волны, так и в силу воздействия гравитации.

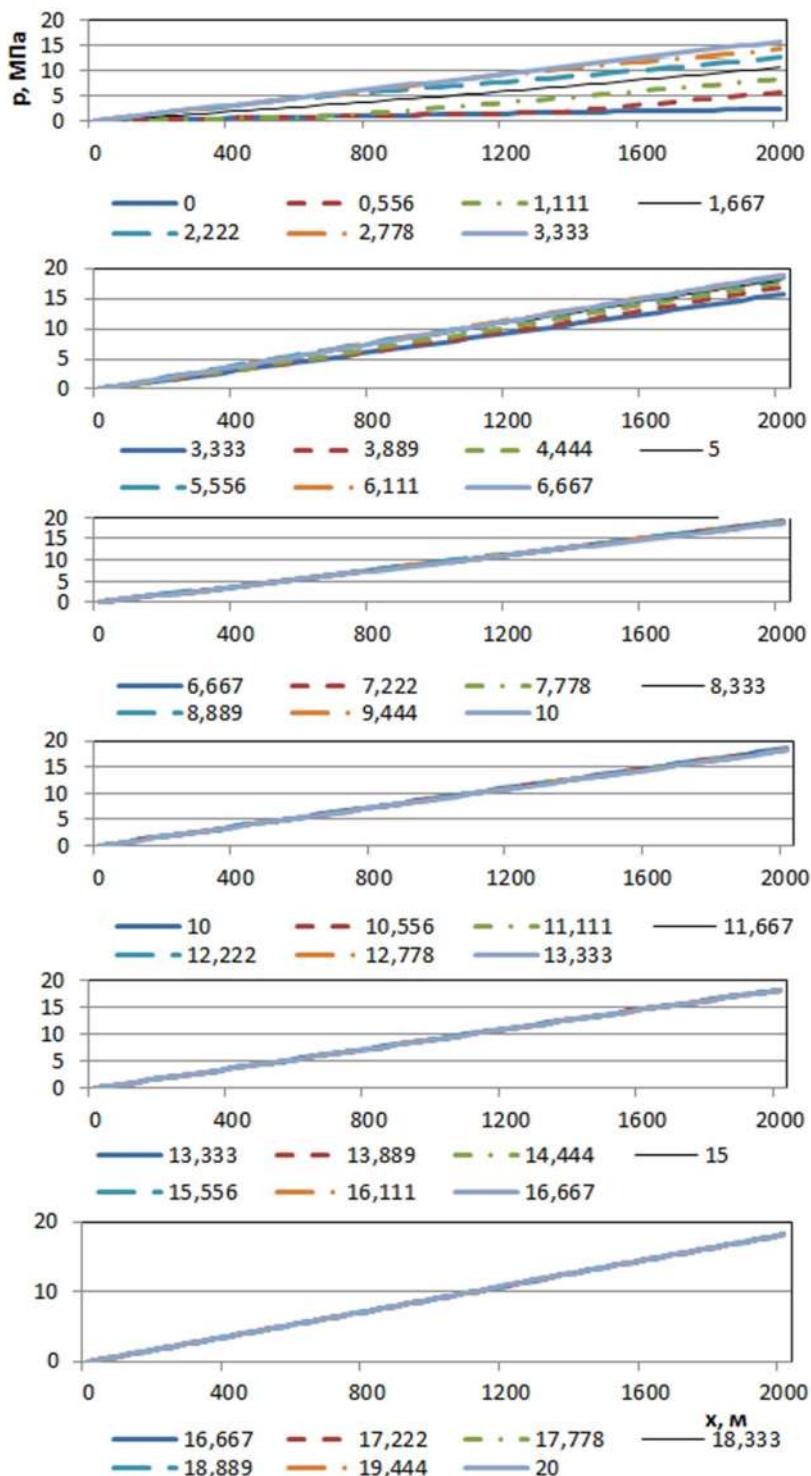


Рис. 6. Кривые избыточного давления, полученные при $L = 2000.0\text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.1\text{ м}^3$

Подключение воздушного колпака с объемом $V_0 = 0.010 \text{ m}^3$ снижает наибольшее значение давления до $\approx 8 \text{ МПа}$, а при $V_0 \geq 0.1000 \text{ m}^3$ оно позволяет уменьшить скачки давления так, чтобы давление не превысило p_{00} . Дальнейшее увеличение объема воздушного колпака приводит к сглаживанию и уменьшению скачков с предельным переходом к состоянию покоя, когда

$$p(x,t) \rightarrow p_{00} - 2a\rho w_0 x - 2\rho g x.$$

Следующая серия расчетов проводилась для потока жидкости вертикально вниз ($\sin \alpha = -1.0$). В соответствии с положением постперевального режима течения давление вниз по потоку растет линейно. Наибольшее значение давления ожидается при $t \rightarrow 2l/c$. Все остальные особенности динамики скорости и давления остаются в своих силах, в том числе интервал изменения давления по времени при увеличении объема демпфирующего устройства.

Серия расчетов проведена для длины участка $L = 2000 \text{ м}$.

На рис. 5 и 6 приведены кривые скорости и статического давления для случая $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.1 \text{ m}^3$. Согласно рисункам, совмещение двух «параболизирующих» факторов: большая длина и воздушный колпак - устранили скачки скорости и давления достаточно быстро, и решение за достаточно короткое время переходит к предельному решению.

Рис. 7 и 8 демонстрируют возможности использования воздушного колпака для вертикального и горизонтального газопроводов.

Типичные параболические кривые получены при $L = 10000.0 \text{ м}$ (рис. 9, 10). С увеличением объема воздушного колпака (рис. 11) наблюдается строгое ограничение изменения давления вокруг состояния потока.

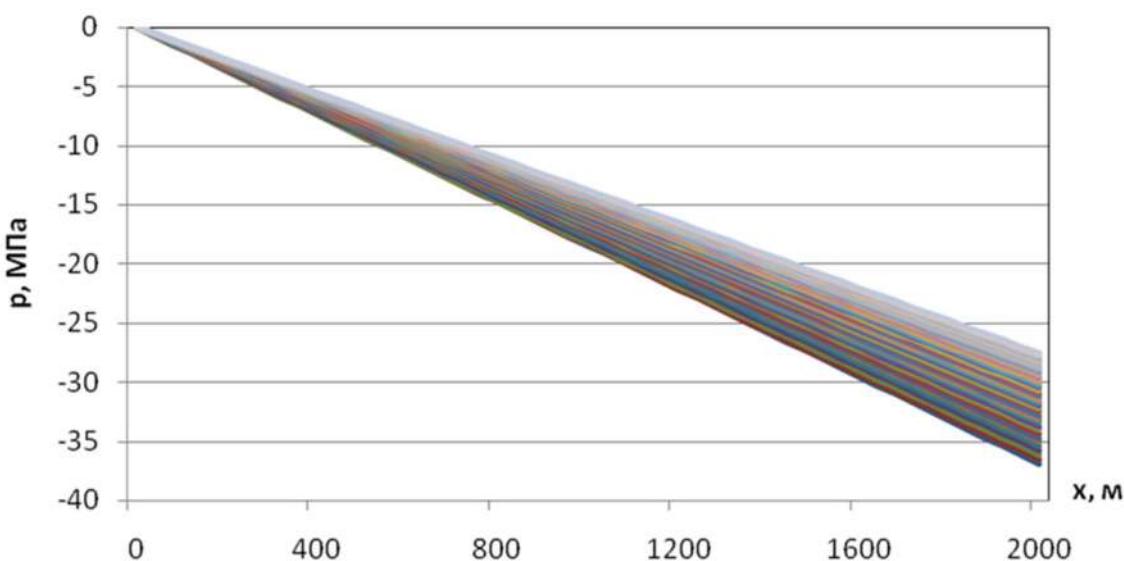


Рис. 7. Изменение избыточного давления при $L = 2000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = 1.0$, $V_0 = 1.0 \text{ m}^3$

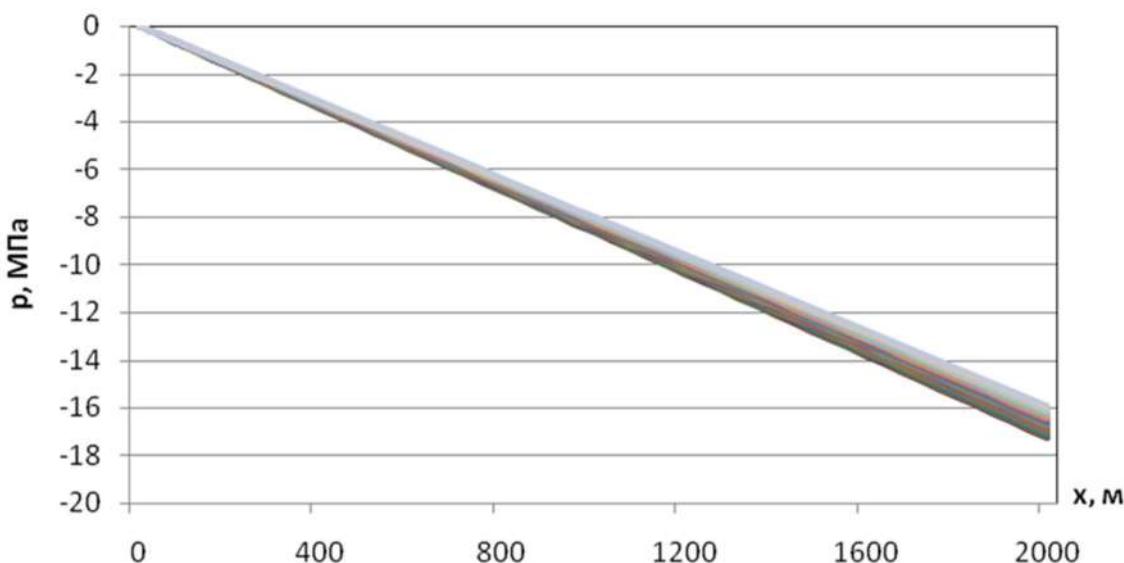


Рис. 8. Изменение избыточного давления при $L = 2000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = 0.0$, $V_0 = 10.0 \text{ m}^3$

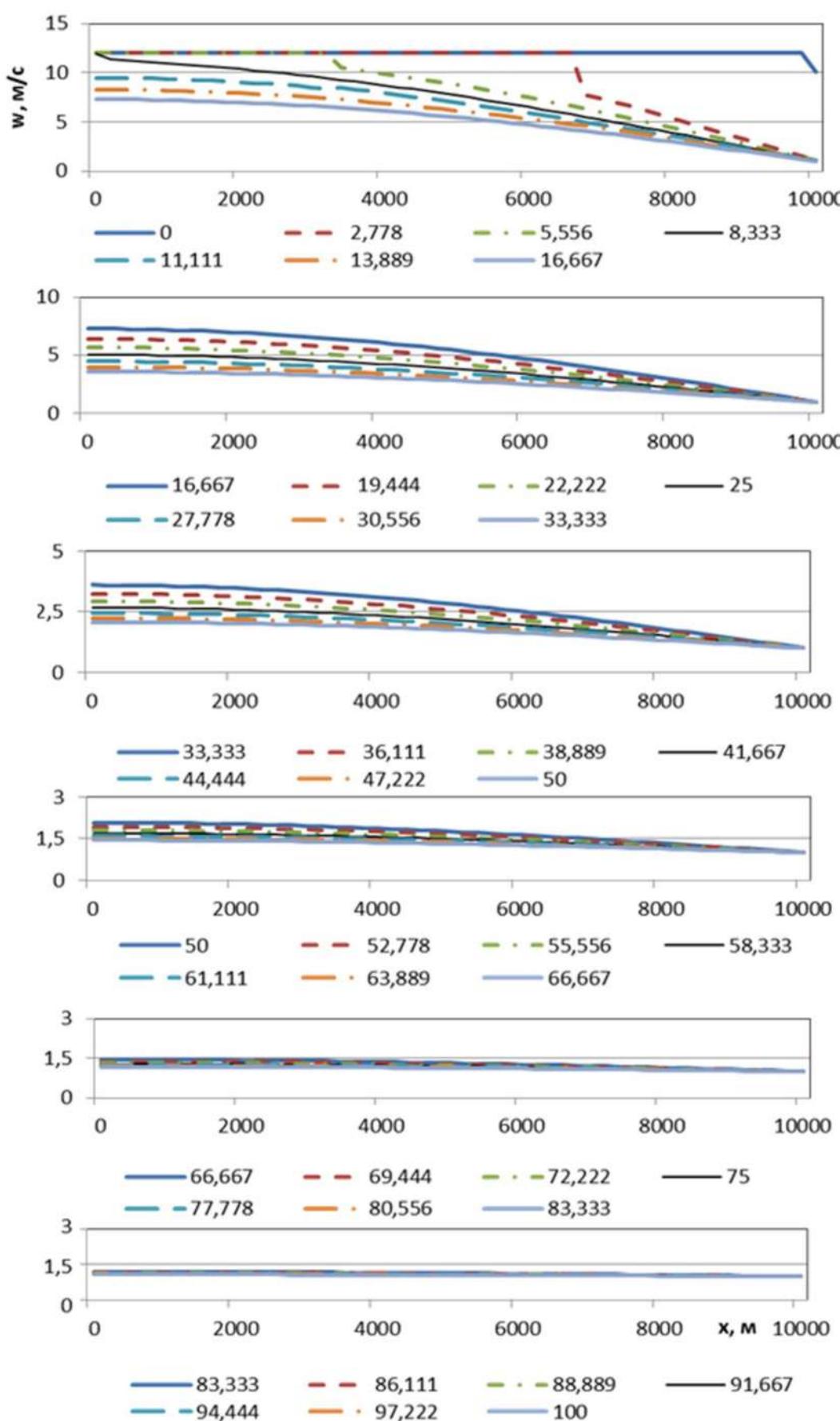


Рис. 9. Изменение средней скорости потока при $L = 10000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.001 \text{ м}^3$

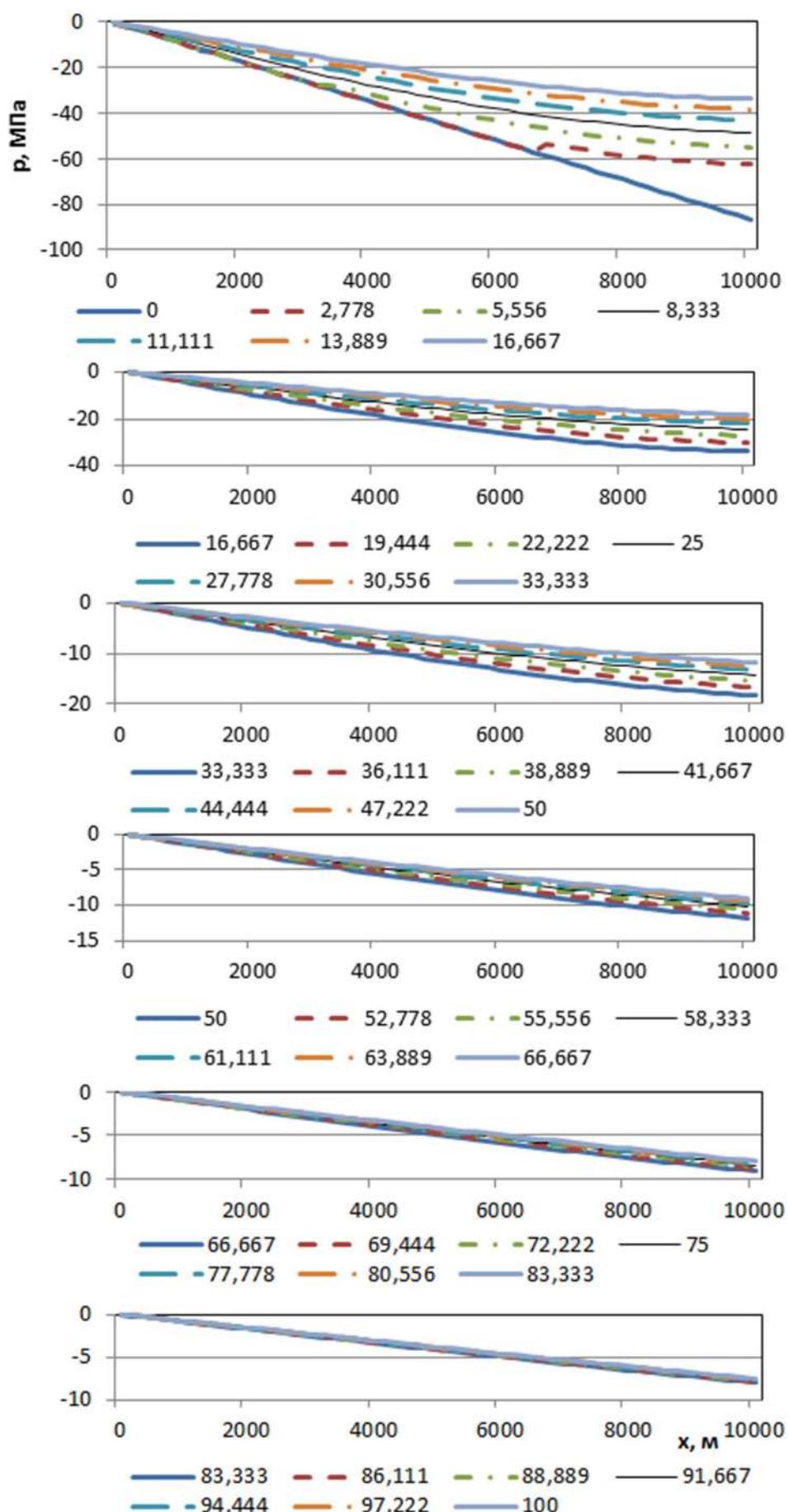


Рис. 10. Кривые избыточного давления при $L = 10000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = -1.0$, $V_0 = 0.001 \text{ м}^3$

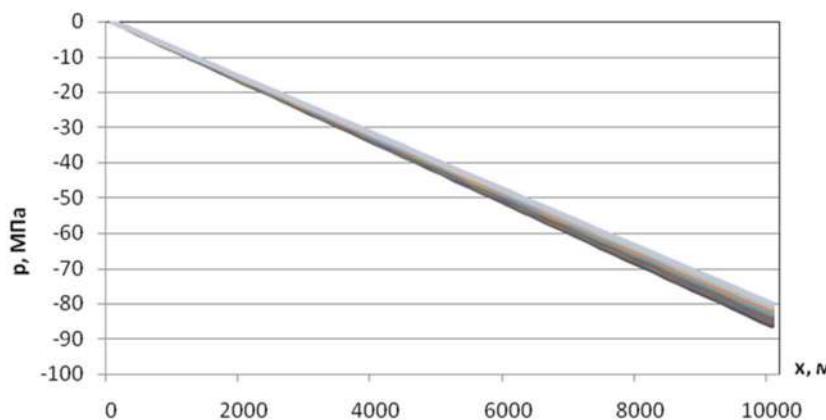


Рис. 11. Изменение избыточного давления при $L = 10000.0 \text{ м}$, $\sin \alpha = 0.0$, $V_0 = 1.0 \text{ м}^3$

5. Заключение

Уравнение (6) в левой части содержит первую и вторую производные от скорости по времени, соответствующие локальной составляющей силы инерции и фактору трения.

Если не учесть силу трения ($a = 0$), то полученное решение задачи привело бы к не гасящим колебаниям скорости потока: при перемещении волны уплотнения налево получили бы нулевую скорость, а при перемещении ее направо – однородную скорость w_0 .

Если в уравнении (6) игнорировать первое слева равенство члена, то получили бы кривые, свойственные «тепловым» волнам.

В первом случае уравнение (6) приобретает вид гиперболического уравнения, а во втором случае – вид параболического уравнения. Такой переход применительно к трубопроводному транспорту флюидов означает переход от коротких трубопроводов к длинным. В самом деле, для длинных трубопроводов полученное решение соответствовало решению параболического уравнения, что выражается гашением возмущений за счет упругостных характеристик жидкости и трубы, а для коротких трубопроводов – бесконечному числу отражений волны уплотнения.

Эти решения хорошо изучены в учебниках по математической физике и стали причиной выбора средних длин участка трубопровода для вычислительного эксперимента, когда силы инерции

и трения проявляются практически в одинаковой степени. А основными факторами изучения стали объем демпфирующего элемента и постоянный уклон оси трубы от горизонта.

Результаты показали, что динамика скорости потока при фиксированных значениях уклона $\sin \alpha$ трубопровода получилась практически одинаковой при различных значениях параметра β . Роль объема воздушного колпака выразилась, в первую очередь, в сглаживании скачков скорости, а далее в уменьшении их амплитуды, и в конечном итоге продлению времени процесса затухания скорости на участке.

Аналогичное поведение наблюдается и в кривых статического давления.

Обнаружен эффект, наблюдаемый у велосипедиста: перед поворотом в одну сторону велосипедист раскачивается в другую сторону. То есть перед нырком в кривых скорости и давления образовались выпуклости. К сожалению, в рамках линейной волновой теории нельзя обосновать этот факт. По-видимому, эти выпуклости связаны с переходом от гиперболичности к параболичности решения, так как в параболическом решении должны были получить монотонно возрастающие или убывающие графики.

Подключение воздушного колпака и увеличение его объема приводят быстрому переходу к малым возмущением скорости $t \rightarrow \infty$ в поле давления, образованном под постоянным воздействием силы гравитации, согласно закону Торичелли.

Литература

- [1] Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А., Куканова М.А. Аналитическое решение задачи о распространении волны уплотнения в наклонном трубопроводе, вызванной торможением жидкости // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2015. – № 2. – С.65-79.
- [2] Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
- [3] Алиев Р.А., Белоусов В.Д., Немудров А.Г. и др. Трубопроводный транспорт нефти и газа: учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
- [4] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М., Наука, 1980. – 686 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
- [6] Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

UDC 512.312

NUMERICAL MODELING OF THE SPREAD OF HARMFUL SUBSTANCES IN THE ATMOSPHERE TAKING INTO ACCOUNT TERRAIN

Sharipov D.K.

senior researcher, Centre for the development of software and hardware-program complexes,
tel.: + (99893) 701-37-12, e-mail: qushqor@mail.ru

Toshtemirova N.

lecturer, Department of Computer Science, Tashkent Institute of Chemical Technology,
tel.: +(99871) 262-71-62, e-mail: nodira3110@mail.ru

Narzullayeva N.

lecturer, Department of Computer Science, Samarkand branch of the Tashkent University of Information Technologies,
tel.: + (99898) 573-88-86, e-mail: niga_cool89@mail.ru

At work, numerical model and algorithm are developed for research, forecasting and making management decision about the process of the spread of harmful airborne substances in the atmosphere. In deriving the mathematical model of the object of the study, the basic weather and climatic factors are taken into account which influence the process of transfer and diffusion of pollutants as well as a significant parameter, the terrain of the region. In the article for solutions of the first and third boundary, the numerical algorithm for the numerical calculations on the computer has been developed. On the basis of mathematical models and numerical algorithms we developed a software tool in high level language, Borland C ++ Builder. The results of numerical calculations are presented as graphics.

It is also considered the use of geo-information web-service as information security software modules for settlement.

Keywords: mathematical model, transfer and diffusion of pollutants, weather and climatic factors, fluid mechanics, numerical algorithm, the software, computing experiment.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВРЕДНЫХ
ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ
Шарипов Д.К., Тоштемирова Н., Нарзуллаева Н.

Приводятся численная модель и алгоритм для исследования и прогнозирования процесса распространения вредных аэрозольных веществ в атмосфере с целью принятия управлентических решений. При выводе модели объекта были учтены основные погодно-климатические факторы, действующие на исследуемый процесс, а также такой существенный параметр, как рельеф местности рассматриваемого региона. На основе созданного математического аппарата разработано программное средство и проведены численные расчеты на ЭВМ. Результаты проведенных вычислительных экспериментов приведены в виде графических объектов. Также в работе рассмотрено использование геоинформационных веб-сервисов в качестве информационного обеспечения для расчетных программных модулей.

Ключевые слова: математическая модель, перенос и диффузия вредных веществ, погодно-климатический фактор, гидромеханика, численный алгоритм, программное средство, вычислительный эксперимент.

YER SATHI RELEFINI HISOBGA OLGAN HOLDA ZAXARLI MODDALARNI
ATMOSFERADA TARQALISHINI SONLI MODELLASHTIRISH
Sharipov D.K., Toshtemirova N., Narzullayeva N.

Ushbu ishda atmosferaga zaxarli aerozollarni tarqalishi jarayonini kuzatilishi, bashorat qilish va boshqarish qarorlarni qabul qilish uchun sonli model va algoritm ishlab chiqildi. Matematik kuzatilayotgan ob'ektning matematik modeli keltirib chiqarishda zaharli zarachalarni kuchish va diffuziya jarayonining klimatik va ob-havoning asosiy omillari va yer sathini, past va balandliklarni hisobga olingan. Maqolada birinchi va uchunch chegaraviy masalani yechish uchun sonli algoritm yaratilgan va ushbu algoritmda EXM da xisob-kitob otqazilgan. Taqdim etilgan matematik model va sonli algoritmda yuqori darajali dasrurlash tili Borland C++ Builderda dasturiy mahsulot yaratildi. Olingan sonliy xisob-kitob natijalari grafik ob'ektlar kurunushiga keltirgan. Maqolada hisob tajribalarni olib borilishi uchun geoinformatsion veb-servis yordamida axborot ta'minotini yaratish texnologiyasi va hisoblash modullari to'g'risidagi ma'lumotlar keltirilgan.

Tayanch iboralar: matematik model, zaxarli modalarni tarqalishi, ob-havoning omillari, gidromexanika, sonli algoritmda, dasturiy vosita, hisoblash tajribasi.

1. Introduction

Since the ecology of atmosphere is one of the most important indicators of the state of the environment, these circumstances put the need for forecasts, the impurity concentration in the surface layer of the atmosphere for different time frames. In particular, the practical interests are short-term forecasts relating to the stipulated maximum permitted concentration of harmful impurities in the design of new structures businesses.

Contamination of the surface layer of the atmosphere and land surface, including the transfer and diffusion of pollutants, and their deposition and concentration - this is a very complex process, subject to the influence of many factors including geographical and climatic conditions characteristic of a particular region under consideration. Moreover, it is important to take into account the fact that the weather conditions change throughout the day and seasons.

Intensive growth of production and the expansion of transportation systems in the world space have significant impact on the ecological environment. This is particularly evident in developing countries where there is a high rate of construction of new production facilities. The increase in the emission of harmful substances into the atmosphere inevitably involves an imbalance in the ecological state of industrial regions with possible changes in climatic conditions.

Construction and operation of industrial facilities without sanitary standard equipment increases the gas content of the atmosphere increases, the direct consequence of which is to reduce the yield and quality of the agricultural sector as a result of loss of aerosols in the form of "acid rain."

In addition to industrial facilities, the source of emission of harmful particles in the atmosphere is their removal from the surface of the soil as a result of the turbulent motion of air masses in the atmospheric boundary layer. This question is particularly relevant for the Aral Sea region, as the decline of the Aral Sea has led to the exposure of more than 35,000 square meters.

One effective mean of supporting decision-making is a computer simulation. Many studies are carried out with the use of computer simulation of the process of transfer and diffusion of pollutants in the atmospheric boundary layer. The problem of mathematical modeling of transport and diffusion of pollutants in the atmospheric boundary layer are actively being solved by many scientists in Uzbekistan and abroad ones. This problem has been solved is being solved by such prominent researchers as a G.I. Marchuk, M.I. Lunev, M.E. Berlyand, V.V. Penenko, V.M. Belolipetskii, F.B. Abutaliev, S.K. Karimberdieva, S.G. Black, S.V. Balls, etc. Entire schools of effectively working today were created.

In particular, the paper [1] is devoted to the development of mathematical models of the dynamics and kinetics of the process of transfer and diffusion of gases and aerosol in the atmosphere.

In [2] the developed software, the process of placing inflammable objects and their optimization takes into account the terrain and spatial form.

The authors of [3] the conducted study relied on the developed regional models of diffusion of substances expressed by the equation of molecular heat conduction in the active layer of soil based on the heat balance of the underlying surface. The authors investigated the environmental problems associated with the distribution of pollutants from known sources and determining the probable location of the source.

The process of transfer and diffusion of pollutants in the atmosphere is considered as well, taking into account the different climatic factors and external disturbances [4].

[5] devoted to the process of dispersion and diffusion of reactive primary pollutants emitted from elevated line sources in a stable boundary layer of the atmosphere with a generalized wind speed and a quadratic function of the vertical height. The authors came up with the exact solution of the problem with the help of the Laplace transform, taking into account the ongoing chemical reaction, the change of state of aggregation of the particles and their deposition on the underlying surface.

Important results of the numerical simulation of turbulence and diffusion of impurities in the surface layer of the atmosphere are contained in the works of D.L. Laikhtman [6].

Significant achievements in the field of mathematical modeling of atmospheric processes are contained in the work of A.E. Aloyan [7]. In particular, the author considers the mathematical model of the transfer of a multicomponent admixture based on photochemical transformation and formation of aerosols in the troposphere.

The main approaches to solving the problem of identification of aerosols of various origins and results of the studies are described by V.K. Danchenko and T.C. Ivlev [8].

A complete methodology of mathematical modeling is developed in the works of G.I. Marchuk and his followers [9]. Moreover, its fundamental questions have been studied and they proposed original design approaches to the study of atmospheric and ocean circulation as well as to the solution with the help of mathematical models of weather problems, the theory of climate and environmental protection.

Issues of mathematical modeling of climate theory are studied by Academician V.P. Dymnikova and his disciples.

2. Statement of the problem

For the numerical modeling of the process of transfer and diffusion of pollutants in the atmosphere, a one-dimensional transport equation is considered as well as the diffusion of harmful substances into the atmosphere from the surface of the earth are into account orography as the first boundary value problem [11-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi H}{\partial x} + \sigma \varphi H = \\ = \mu \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in D, \end{aligned} \quad (1)$$

with the following conditions

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0, \text{when } t=0, 0 < x < L, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0, t) = v_1, \text{when } x = 0, \\ \varphi(L, t) = v_2, \text{when } x = L. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Here φ^0 , φ - the original and the concentration of aerosol particles in the atmosphere; u - wind speed; σ - absorption coefficient; μ - The coefficient of turbulence; $f(x, t)$ - The power of the source; H - Option to define the terrain, using the desired ratio, L - the length of the decision problem.

$$H = \begin{cases} 0 & \text{when layer is under the earth;} \\ 1 & \text{when layer is in the atmosphere;} \\ (\eta - z_{K-0.5})/\Delta z & \text{when layer is on the orographic surface.} \end{cases}$$

Here η - the height of the hill by a plane parallel to the sea level as well $\Delta z = z_{k+0.5} - z_{k-0.5}$.

For each layer of the model introduced a factor H ($0 \leq H \leq 1$), determining the degree of blockage of airflow (Figures 1).

Suppose that $u = 0$ in the equation (1), we obtain the following

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi H = \mu \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4)$$

3. The method of solution

The problem (1) - (3) to solve the difference method. We introduce the grid area

$$\begin{aligned} \omega_x = (x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N+1, h = \\ = \frac{l}{N+1}, t = j\Delta t, j = 0, 1, \dots, T). \end{aligned}$$

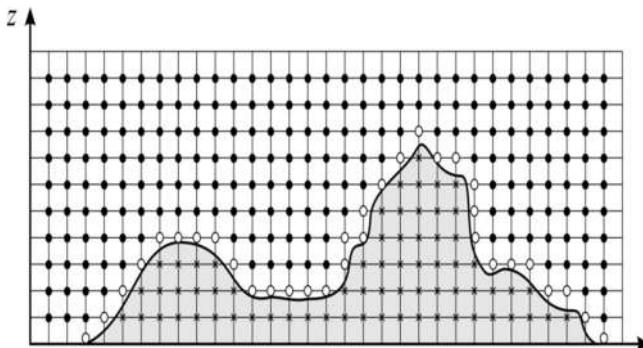


Fig. 1. The terrain along the field of aerosol transport emissions

\circ - $H = (\eta - z_{K-0.5})/\Delta z$, \times - $H = 0$, \bullet - $H = 1$.

On the grid ω_x will replace the differential operators difference [13]:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_j = \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\Delta t} + o(t), \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} H_{i+1} - 2\varphi_i^{j+1} H_i + \varphi_{i-1}^{j+1} H_{i-1}}{h^2} + o(h^2), \end{array} \right\} \quad (5)$$

and substituting (5) into (4) we get.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\Delta t} + \sigma \varphi_i^{j+1} H_i = \\ = \mu \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} H_{i+1} - 2\varphi_i^{j+1} H_i + \varphi_{i-1}^{j+1} H_{i-1}}{h^2} + . \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ f_{-i}^j(x, t) + o(\Delta t + h^2)$$

Here $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$.

Equation (6) can be written to $i = 1$, $j = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^1 - \varphi_1^0}{\Delta t} + \sigma \varphi_1^1 H_1 = \\ = \mu \frac{\varphi_2^1 H_2 - 2\varphi_1^1 H_1 + \varphi_0^1 H_0}{h^2} + \bar{f}_1^1(x, t) \end{aligned}.$$

Taking into account the boundary conditions (3) we have,

$$-\left(\frac{2\mu H_1}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma H_1 \right) \varphi_1^1 + \frac{\mu H_1}{h^2} \varphi_2^1 = -\bar{f}_1^1(x, t),$$

Where

$$\bar{f}_1^1 = \left(f_1^1 + \frac{1}{\Delta t} \varphi^0(x_1) + \frac{1}{h^2} v_1 \right).$$

Similarly, when $i = 2$ we get

$$\frac{\varphi_2^1 - \varphi_2^0}{\Delta t} + \sigma \varphi_2^1 H_1 = \mu \frac{\varphi_3^1 H_3 - 2\varphi_2^1 H_2 + \varphi_1^1 H_1}{h^2} + \bar{f}_2^1(x),$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{h^2} \varphi_1^1 H_1 - \left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \varphi_2^1 H_2 + \\ + \frac{\mu}{h^2} \varphi_3^1 H_3 = - \left(\bar{f}_2^1(x) + \frac{1}{\Delta t} \varphi_2^0 \right) \end{aligned}.$$

For $i = 3, 4, \dots, N-1$ we have

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{h^2} \varphi_{i-1}^1 H_{i-1} - \left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \varphi_i^1 H_i + \\ + \frac{\mu}{h^2} \varphi_{i+1}^1 H_{i+1} = - \left(\bar{f}_i^1(x) + \frac{1}{\Delta t} \varphi_i^0 \right) \end{aligned}$$

When $i = N$, the equation (6) can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_N^1 - \varphi_N^0}{\Delta t} = \\ = \mu \frac{\varphi_{N+1}^1 H_{N+1} - 2\varphi_N^1 H_N + \varphi_{N-1}^1 H_{N-1}}{h^2} + \bar{f}_N^1(x) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{h^2} \varphi_{N-1}^1 H_{N-1} - \left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \varphi_N^1 H_N + \\ + \frac{\mu}{h^2} \varphi_{N+1}^1 H_{N+1} = - \bar{f}_N^1(x), \end{aligned}$$

where

$$\bar{f}_N^1(x) H_N = \left(f_N^1(x) + \frac{1}{\Delta t} \varphi^0(x_N) + \frac{\mu}{h^2} \varphi_N(t_N) \right).$$

So, to find φ_i^1 ($i=1,2,\dots,N$) in the end we get a system of linear equations that can be solved by the sweep method,

$$A\Phi = -F, \quad (7)$$

Where

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2\mu H_i}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma H_i\right) \frac{\mu}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\mu H_{i-1}}{h^2} & -\left(\frac{2\mu H_i}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma H_i\right) \frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu H_{i+1}}{h^2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu H_{i-1}}{h^2} & -\left(\frac{2\mu H_i}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma H_i\right) \frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu H_{i+1}}{h^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\mu H_{i-1}}{h^2} & -\left(\frac{2\mu H_i}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma H_i\right) \end{pmatrix}$$

Here

$$\Phi = (\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_N^1), F = -(\bar{f}_1^1, \bar{f}_2^1, \dots, \bar{f}_N^1),$$

$$\bar{f}_1^1 = -\left(\bar{f}_1^0 + \frac{1}{\Delta t} \varphi(x_1 + \frac{1}{h^2} v_1)\right),$$

$$\bar{f}_N^1 = -\left(\bar{f}_N^0 + \frac{1}{\Delta t} \varphi_N(x_N + \frac{1}{h^2} v_2)\right).$$

To solve the system (7) sweep method is applicable since the coefficients of the system satisfy the conditions for stability of the sweep.

Studies of the spread of harmful substances into the atmosphere have shown that depending on the rate of air flow dynamics and direction of change of concentration of impurities in the atmosphere varies considerably over time which is needed for transporting particulate boundary of solutions of the problem, or vice versa.

Based on the above, for a more adequate description of the process it is necessary to consider the process as a third boundary value problem.

Suppose $D = (0 < x < L, t > 0)$ you want to find in the solution of the equation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma \varphi H = \mu \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (8)$$

with boundary conditions

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad 0 < x < L, \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} - \alpha_1 \varphi_1 = v_1, \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=L} - \alpha_2 \varphi_2 = v_2. \end{array} \right\} \quad (10)$$

The problem is solved in a similar manner as the first task.

To increase the order of approximation we construct a difference scheme of the second order of accuracy by integrating the equation (8) from zero to $\frac{h}{2}$ where (h on the grid x).

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \sigma \int_0^{h/2} \varphi H dx = \mu \int_0^{h/2} \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} dx + \int_0^{h/2} f(x) dx$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{h/2} \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} dx &= \mu \left. \frac{\partial \varphi H}{\partial x} \right|_0^{h/2} = \\ &= \mu \left(\frac{\partial \varphi H}{\partial x} \right)_{h/2} - \mu \left(\frac{\partial \varphi H}{\partial x} \right)_0 = \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mu \frac{\varphi_1 H_1 - \varphi_0 H_0}{h} - \mu(\alpha_1 \varphi_0 H_0 - v_1) + f_0 \frac{h}{2}.$$

According to the mean value theorem, we have

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \left. \frac{\partial \varphi H}{\partial x} \right|_{x=0} \frac{h}{2} \approx \frac{\partial \varphi_0 H_0}{\partial t} \frac{h}{2}, \quad (12)$$

$$\sigma \int_0^{h/2} \varphi H dx = \sigma \varphi H \Big|_0^{h/2} \frac{h}{2}, \quad (13)$$

Similarly to the first part

$$\int_0^{h/2} f(x) dx = f_0 \frac{h}{2}. \quad (14)$$

Substituting in (8) of (11) - (14) and obtain the differential equation for $x = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{h}{2} + \sigma \varphi_0 \frac{h}{2} = \mu \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} - (\alpha_1 \varphi_0 - v_1) \right) + f_0 \frac{h}{2}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \sigma \varphi_0 &= \\ = \mu \left[\left(-\left(\frac{2}{h^2} + \alpha_1 \frac{2}{h} \right) \varphi_0 + \frac{2}{h^2} \varphi_1 \right) \right] + f_0 + \frac{2v_1}{h} \\ - \left(\frac{2}{h^2} \mu + \alpha_1 \frac{2}{h} \mu + \sigma \right) \varphi_0 + \frac{2\mu}{h^2} \varphi_1 &= -\left(f_0 + \frac{2v_1}{h} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Let

$$a_0 = \frac{2\mu}{h^2}, c_0 = \frac{2\mu}{h^2}, b_0 = a_0 + c_0 + \alpha_1 \frac{2\mu}{h} + \sigma.$$

Similarly, we integrate the equation (8) on the segment $[L - \frac{h}{2}; L]$

$$\begin{aligned} \int_{L-h/2}^L \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \sigma \int_{L-h/2}^L \varphi H dx &= \\ = \mu \int_{L-h/2}^L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx + \int_{L-h/2}^L f(x) dx & \end{aligned} \quad (15)$$

So, when $x = L$ we get the equation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t} \frac{h}{2} + \sigma \varphi_\ell H_\ell \frac{h}{2} &= \\ = \frac{2}{h} \mu \left(-\frac{\varphi_{N-1} H_{N-1}}{h} - (\alpha_2 \varphi_{N+1} H_{N+1} - v_2) \right) + f_\ell H_\ell \frac{h}{2}, \\ \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t} + \sigma \varphi_\ell H_\ell &= \\ = \mu \left[\left(-\frac{2}{h} + \alpha_2 \frac{2}{h} \right) \varphi_\ell H_\ell + \frac{2}{h^2} \varphi_\ell H_\ell \right] + f_0 + \frac{2v_2}{h}, \\ - \left(\frac{2}{h^2} \mu + \alpha_2 \frac{2}{h} \mu + \sigma \right) \varphi_{N+1} H_{N+1} + & \\ + \frac{2\mu}{h^2} \varphi_N H_N &= -\left(f_\ell + \frac{2v_2}{h} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

We denote.

$$a_N = c_N = \frac{2\mu}{h^2}, b_{N+1} = a_N + c_N + \alpha_2 \frac{2\mu}{h} + \sigma.$$

Thus, to obtain φ_i^1 ($i=0,1,\dots,N+1$) the location of the system of differential-difference equations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - A\Phi = -F. \quad (18)$$

Where,

$$A = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N+1} & b_{N+1} \end{pmatrix},$$

$$\Phi = (\varphi_0^1, \varphi_1^1, \dots, \varphi_{N+1}^1),$$

$$F = -(f_0^1, f_1^1, \dots, f_{N+1}^1).$$

In order not to complicate the record drop of the index.

Matrix - Jacobi diagonally dominant. It can be written as

$$A_x = V_x \Lambda_x V_x^{-1}. \quad (19)$$

Λ - a diagonal matrix whose elements are the eigenvalues of the matrix; λ_n ($n=1,2,\dots,N$) A ; V - Fundamental matrix corresponding to the matrix whose columns are A , $V = [v_1, v_2, \dots, v_N]$, - right eigenvectors corresponding to the eigenvalues. Multiplying (18) on V_x^{-1} and taking into account the properties of the matrix A_x , obtained N independently of differential equations with the appropriate boundary conditions, λ_n

$$\frac{d\varphi_i^{(1)}}{dt} + \alpha_N^2 \varphi_i^{(1)} H_i = -F, \quad (20)$$

$$\varphi_i^{(1)}(0) = \varphi_i^0, \quad (21)$$

where, $i=1,2,\dots,N$, $\lambda_n^2 = -\lambda_n$, $\lambda_n < 0$,

$$\begin{cases} \Phi^{(1)} = V^{-1}\Phi = (\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{N+1}^{(1)}), \\ F^{(1)} = V^{-1}F = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_N^{(1)}). \end{cases} \quad (22)$$

It is known that the solution of (20) and (21) takes the form

$$\varphi_i^{(1)}(t) = e^{-\alpha_n^2 t} \left(\varphi_i^0 + \int_0^t e^{\alpha_n \tau} f_i^{(1)} d\tau \right). \quad (23)$$

Using (23) we find the value of $\varphi_i^1(t)$

$$\varphi_i^1(t) = \sum_{s=1}^N v_{i,s} \varphi_s^{(1)}(t), \quad i=1,2,\dots,N$$

and the solution of the problem (8) - (10).

Now consider the case when $u \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + uH \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \varphi H = \mu \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} + f(x,t)H, \quad (24)$$

with boundary conditions

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi^0(x), \\ \varphi(0,t) = v_1, \quad x=0, \\ \varphi(L,t) = v_2, \quad x=L. \end{cases} \quad (25)$$

We introduce the replacement function $\varphi = e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \bar{\varphi}$, and differentiating (24) according to x obtain

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \bar{\varphi} + e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{4} \frac{u^2 H^2}{\mu^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \bar{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{u^2 H^2}{\mu^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \bar{\varphi} - \frac{uH}{\mu} e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Expressions (26) and (27) Substituting (24) and obtain an equation.

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \left(\sigma H + \frac{u^2 H^2}{\mu^2} \right) \bar{\varphi} = \mu \frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} + f(x)e^{-\frac{1}{2} \frac{uH}{\mu} x}. \quad (28)$$

Accordingly converted and the boundary conditions (25),

$$\varphi(x,0) = \bar{\varphi}(x), \quad 0 < x < L, \quad (29)$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(0,t) = \bar{v}_1, \quad x=0, \\ \bar{\varphi}(L,t) = \bar{v}_2, \quad x=L. \end{cases} \quad (30)$$

We introduce the grid area

$$\omega_{x,t} = \left(x_i = ih, \quad (i=0,1,2,\dots,N+1), h = \frac{L}{N+1}, \quad t = j\Delta t, \quad j=0,1,\dots \right).$$

On the grid will replace the differential operators difference

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^{j+1} - \bar{\varphi}_i^j}{\Delta t} + \Delta t. \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi H}{\partial x^2} = \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^{j+1} H_{i+1} - 2\bar{\varphi}_i^{j+1} H_i + \bar{\varphi}_{i-1}^{j+1} H_{i-1}}{h^2} + o(h^2). \quad (32)$$

Substituting (31) - (32) to (28) and obtain.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_i^{j+1} - \bar{\varphi}_i^j}{\Delta t} + \left(\sigma + \frac{u^2}{\mu^2} \right) \bar{\varphi}_i^{j+1} H_i &= \\ = \mu \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^{j+1} H_{i+1} - 2\bar{\varphi}_i^{j+1} H_i + \bar{\varphi}_{i-1}^{j+1} H_{i-1}}{h^2} + \bar{f}_i^j(x) H_i &. \end{aligned} \quad (33)$$

Here $i=1,2,\dots,N$, $j=0,1,2,\dots T$.

Equation (33) to $i=1$, $j=0$ write,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_1^1 - \bar{\varphi}_1^0}{\Delta t} + \left(\sigma + \frac{u^2}{\mu^2} \right) \bar{\varphi}_1^1 H_1 &= \\ = \mu \frac{\bar{\varphi}_2^1 H_2 - 2\bar{\varphi}_1^1 H_1 + \bar{\varphi}_0^1 H_0}{h^2} + \bar{f}_1^0(x) H_1 &. \end{aligned}$$

Taking into account the boundary conditions (29) we have,

$$-\left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \bar{\varphi}_1^1 H_1 + \frac{2\mu}{h^2} \bar{\varphi}_2^1 H_2 = -\bar{f}_1^1(x) H_1.$$

Where

$$\bar{f}_1^1 = -\left(f_1^1 + \frac{1}{\Delta t} \bar{\varphi}_1^1 H_1 + \frac{1}{h^2} v_1 \right),$$

for $i=2$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_2^1 - \bar{\varphi}_2^0}{\Delta t} + \left(\sigma + \frac{u^2}{\mu^2} \right) \bar{\varphi}_2^1 H_2 = \\ = \mu \frac{\bar{\varphi}_3^1 H_3 - 2\bar{\varphi}_2^1 H_2 + \bar{\varphi}_1^1 H_1}{h^2} + \left(\bar{f}_2^1(x) H_2 + \frac{1}{\Delta t} \bar{\varphi}_0^1 \right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{h^2} \bar{\varphi}_1^1 H_1 - \left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \bar{\varphi}_2^1 H_2 + \\ + \frac{\mu}{h^2} \bar{\varphi}_3^1 H_3 = -\bar{f}_2^1(x) H_2 \end{aligned}$$

for $i = N$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varphi}_N^1 - \bar{\varphi}_N^0}{\Delta t} + \left(\sigma + \frac{u^2}{\mu^2} \right) \bar{\varphi}_N^1 H_N = \\ = \mu \frac{\bar{\varphi}_{N+1}^1 H_{N+1} - 2\bar{\varphi}_N^1 H_N + \bar{\varphi}_{N-1}^1 H_{N-1}}{h^2} + \bar{f}_N^1(x) H_N \\ - \left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma \right) \bar{\varphi}_N^1 H_N + \frac{\mu}{h^2} \bar{\varphi}_{N+1}^1 H_{N+1} = -\bar{f}_N^1(x) H_N. \end{aligned}$$

So, to find a system of linear algebraic equations

$$A\bar{\Phi} = -F. \quad (34)$$

Where

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma\right) & \frac{\mu}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{h^2} & -\left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma\right) & \frac{\mu}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\mu}{h^2} & -\left(\frac{2\mu}{h^2} + \frac{1}{\Delta t} + \sigma\right) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Phi} = (\bar{\varphi}_1^1, \bar{\varphi}_2^1, \dots, \bar{\varphi}_N^1), F = -(\bar{f}_1^1, \bar{f}_2^1, \dots, \bar{f}_N^1).$$

As in the past, to solve the system (34) apply the sweep method, since the coefficients of (34) satisfy the conditions for stability of the sweep.

4. Calculating experiment and numerical analysis

On the basis of mathematical models and numerical algorithms we developed a software tool in high level language Borland C ++ Builder. This software is designed for analysis, forecasting and monitoring of the spread of harmful substances in the atmosphere in order to support decision-making.

The software has a modular structure (fig. 2 - 5). The main module is designed to prepare and enter the main process parameters (speed of the air mass, the diffusion coefficient, the absorption coefficient of harmful substances in the atmosphere, the power source, the time for computing, integration step at the time and spatial variables, type of ingredient, the coordinates of the emitter of harmful substances).

Fig. 2 displays the main menu. The set includes the following submenu items:

- "File" button to select, open, save, print, and close the project;
- "Enter", respectively, to enter the main parameters of a mathematical model of the process;
- "Method" is used to select the finite difference method for the integration of the problem, including an explicit, implicit and semi-implicit scheme;
- "Help" for more help with the numerical calculations on a computer.

The software also includes a module of visualization results of the numerical calculations on a computer to interpret them with the ability to save as a graphic object. Diagramming carried out in separate windows program (fig. 4).

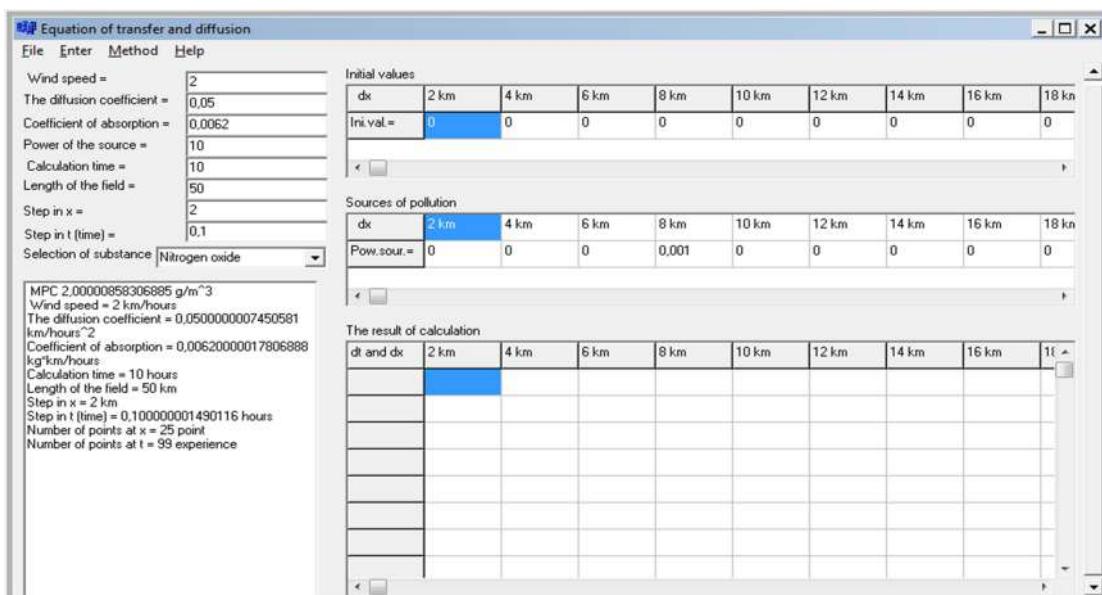


Fig. 2. Work program interface

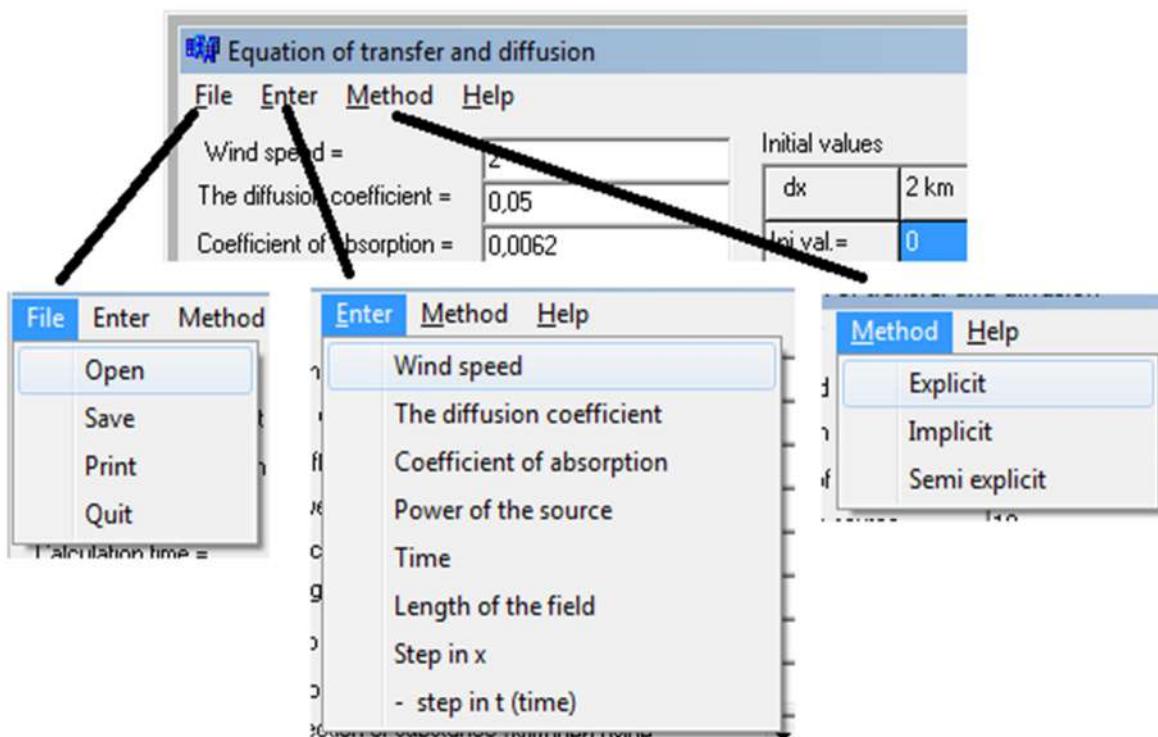


Fig. 3. Main menu and submenu items in the program

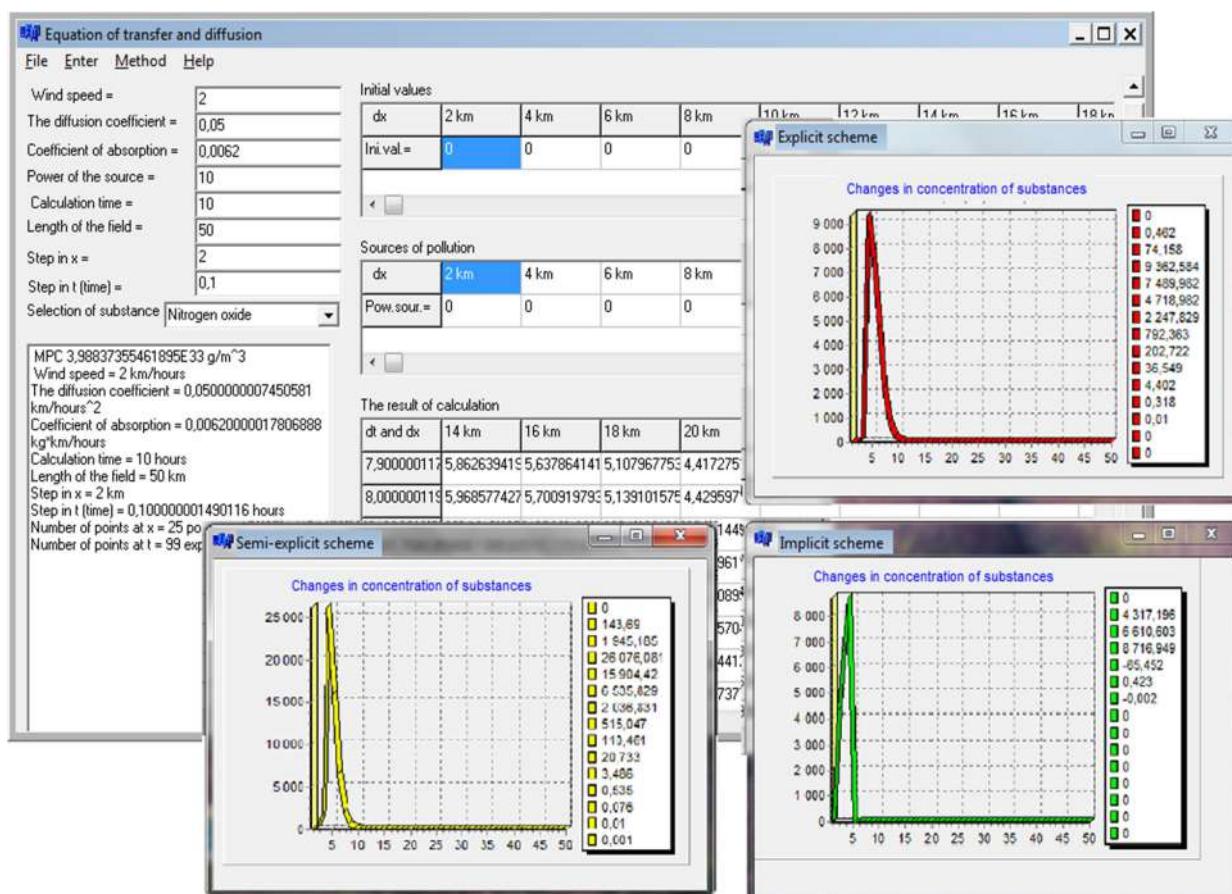
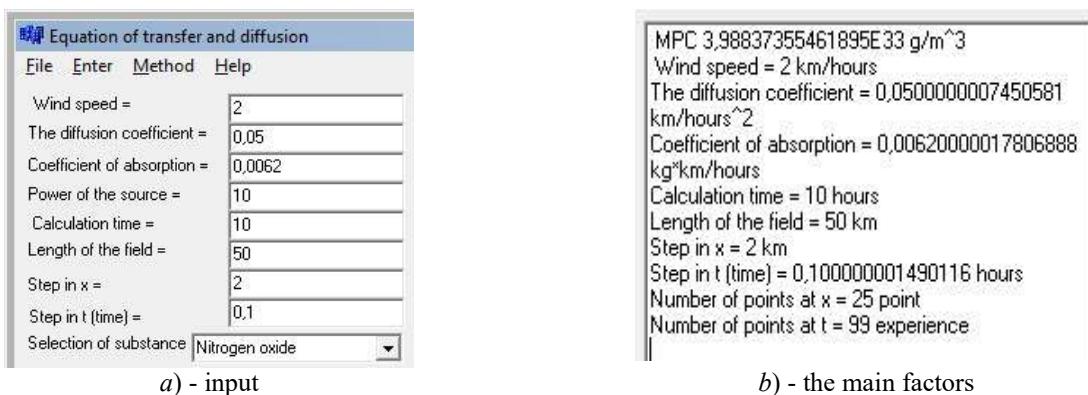


Fig. 4. Program interface with the results

The developed program for data input can be used in two ways: first by using "INPUT" menu, and second through the appropriate form on the top left of the main window (fig. 5a). Each line is a field for input values. The main factors used in the calculation are shown in Fig. 5b. The window shown in fig. 5 is used to define the

coordinates of the source and its power, and the initial concentration of pollutants in the atmosphere.

To display the results of the numerical calculations on a computer, you can use a text and a graphical representation of the results depending on the method of solving the problem in a variety of colors (fig. 6).



a) - input

b) - the main factors

Fig. 5



Fig. 6

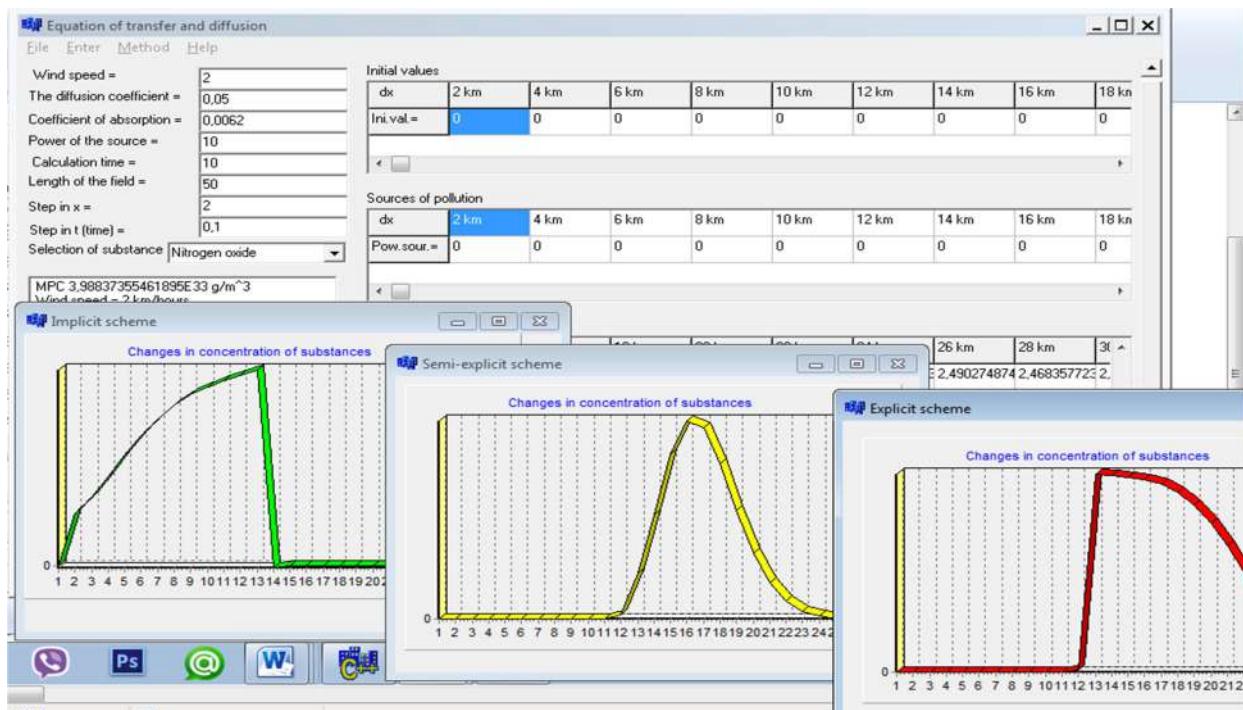


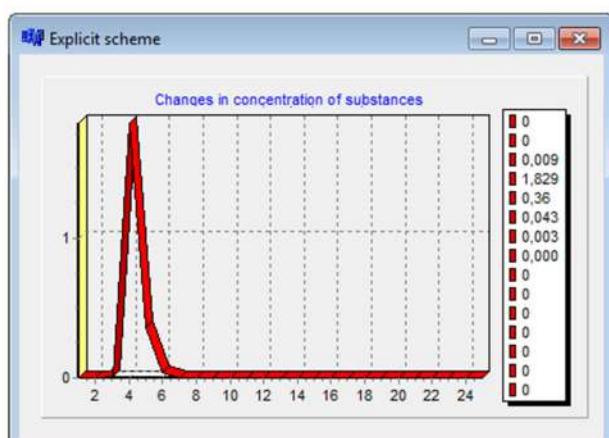
Fig. 7. Results of computational experiments in tabular and graphical form

For the study, the analysis and prediction of the spread of harmful substances and a series of numerical experiments on the computer were conducted with the real data (table 1, fig. 8 - 14).

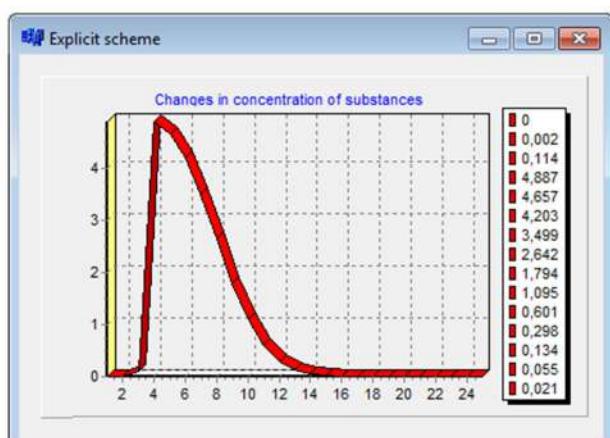
Table 1

| No | Number of variables | Variable Name | Value |
|----|-------------------------------------|----------------|---------------------------|
| 1 | MPC harmful substances (ingredient) | Sulfur dioxide | 0.0005 g / m ³ |
| 2 | Field | Length | 50 km |

| | Experiment | Lx | |
|---|---------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 3 | The time of the experiment | T | 10:00 |
| 4 | Wind speed | V | 1 m / s |
| 5 | The diffusion coefficient | Mx | 0,05 |
| 6 | Ratio absorption | G | 0,0062 |
| 7 | Step to x | Dx | 1 km |
| 8 | The time step | Dt | 0,1 hours |
| 9 | The number of sources and power | Ist | 1-0,01 kg / m ³ per hour |

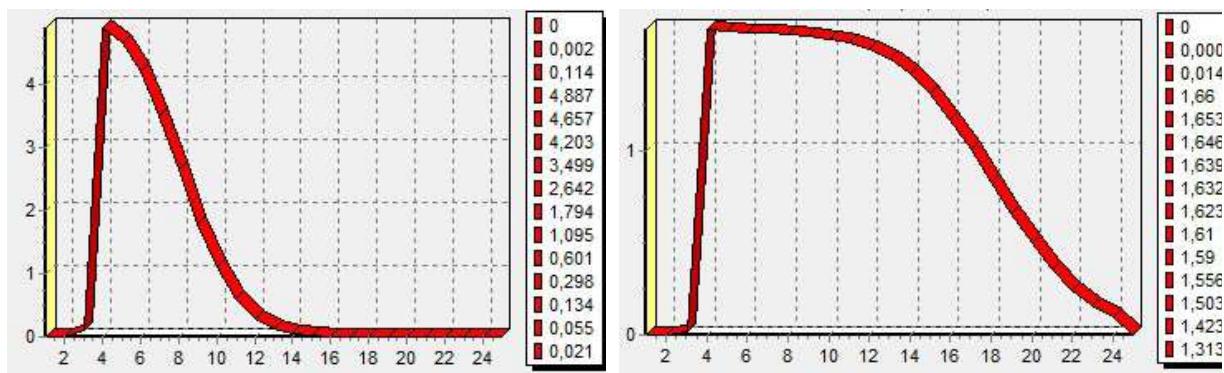


a) after 1 hour



b) after 10:00

Fig. 8. Change in the concentration of harmful substances in time

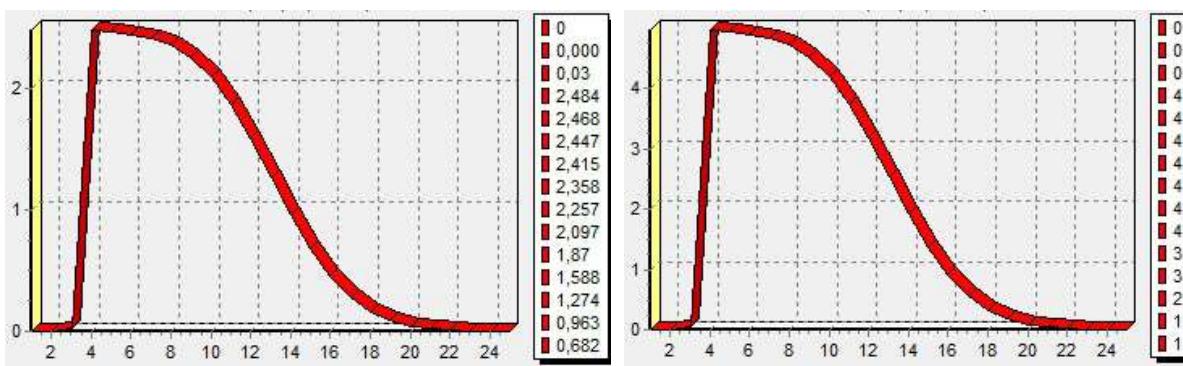


a) at a speed of 1 km / h



b) at a speed of 3 km / h

Fig. 9. Changes in the concentration of harmful substances at different values of the velocity of the air mass



a) at a speed of 2 km / h,
Nitric oxide (MPC = 0.0004)

b) at a speed of 2 km / h,
Ammonia (MPC = 0.0002)

Fig. 10. Change in the concentration of harmful substances
at different values of the maximum permissible concentration

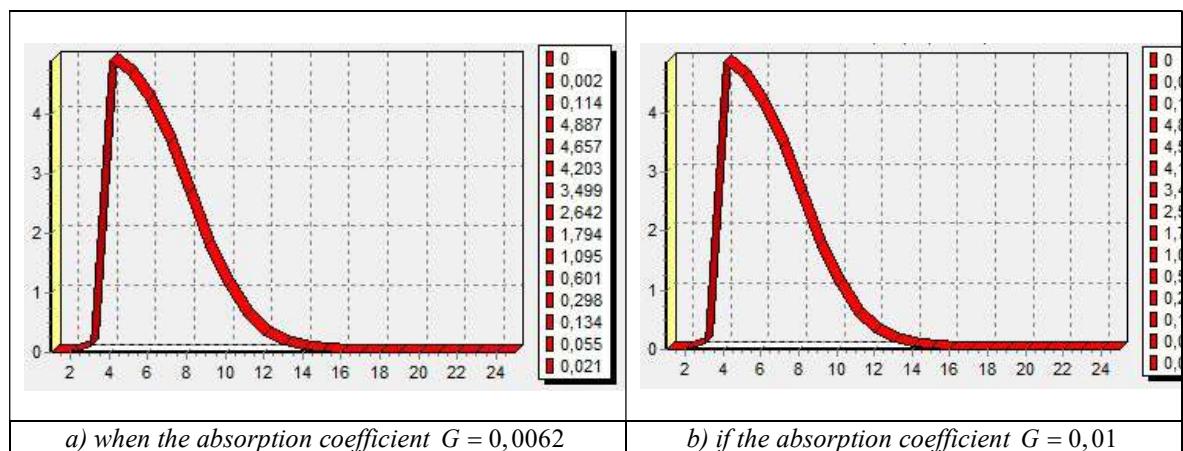
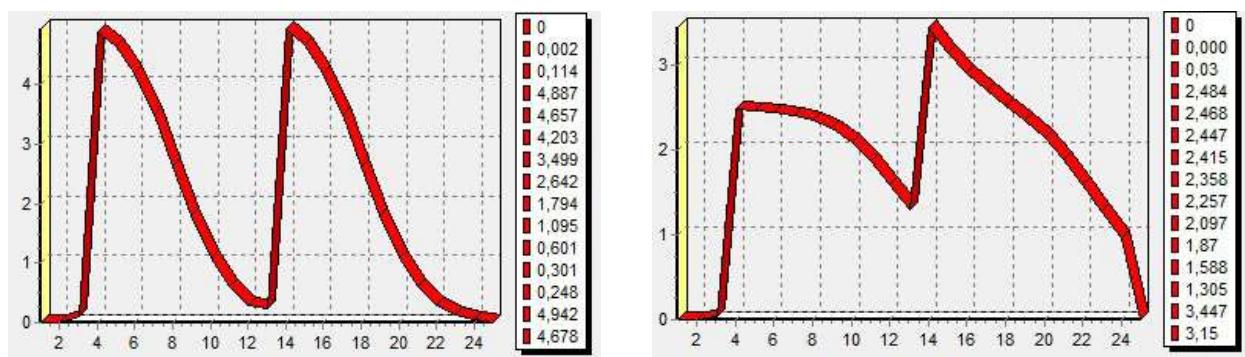


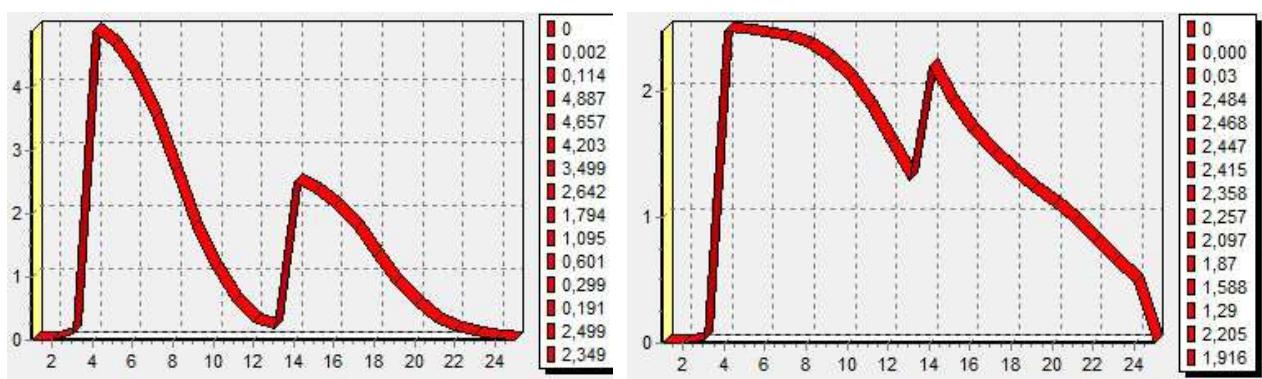
Fig. 11. Change in the concentration of harmful substances at different values of the absorption coefficient



a) The change in the concentration of harmful substances in the two sources of the same power and wind speed 1 km / h

b) changes in the concentration of harmful substances in the two sources of the same power and wind speed 2 km / h

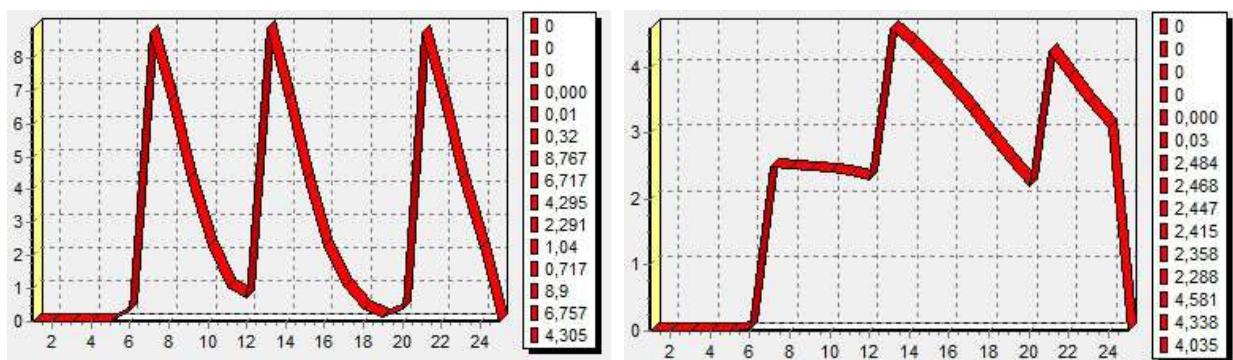
Fig. 12. Change in the concentration of harmful substances in time



a) the change in the concentration of harmful substances at two different power sources ($q_1/2 = q_2$) and a wind speed of 1 km / h

b) changes in the concentration of harmful substances at two different power sources ($q_1/2 = q_2$) and a wind speed of 2 km / hour

Fig. 13. Change in the concentration of harmful substances in time



a) the change in the concentration of harmful substances for the same three power sources ($q_1 = q_2 = q_3$) and a wind speed of 0.5 km / hour

b) changes in the concentration of harmful substances for the same three power sources ($q_1 = q_2 = q_3$) and a wind speed of 2 km / hour

Fig. 14. Change in the concentration of harmful substances in time

5. Conclusions

Thus, this software tool, developed on the basis of the above study of a software problem, allows you to calculate the following indicators:

- The total amount of aerosols in the specified area over a certain period of time;
- The average number of aerosol in a specified area over a specified time period;
- The amount of aerosols dropped to the underlying surface;
- The number of aerosols separated on the underlying surface at a given time at a given point.

Computational experiments established that the change in the concentration of aerosols in the atmosphere depends on the absorption coefficient of the particles, which varies depending on the meteorological indicators, the season and time of a day. The maximum absorption of harmful particulate matter in the atmosphere is typical for the morning and evening hours;

It has been found that a change of concentration of aerosol emissions in the atmosphere directly influence the direction and velocity of air flow in the atmosphere, particulate mass, location and the number of aerosol

generators in this region. When the power of aerosol generators increases, the area of the region, where the concentration exceeds the permissible sanitary norms, grows as well. When there is unstable stratification of the wind, the area of distribution of harmful substances have a spiked character, increases within a short period of time.

Simulation results revealed that a change in the wind speed and direction plays an important role on hills. Hills or ridges that are in the open landscape. Above the hills the wind speed is higher than the surrounding flat areas. Since the high pressure area actually extends some distance up the hill, the wind changes direction before reaching it. If the air mass meets a steep hill with a rough surface, the wind speed increases dramatically, which leads to an increase in the coefficient of turbulence. Wind speed increases with the difference of atmospheric pressure and air flow rate decreases due to friction at the surface roughness of the underlying surface;

The analysis of computational experiments shows that when predicting air pollution, a special role plays consideration of the coefficient of the interaction with underlying surface.

It has also been found that during the emission of high concentrations of pollution sources, the maximum recorded in hazardous wind speeds (in the range of 3 to 6 m / s depending on the flow rate of gas from the mouth of blowout pipes). Dangerous winds combined with unstable stratification and intense transfer of impurities leads to the maximum increase in the concentrations of pollutants in the surface layer of the atmosphere. In such

cases a fundamental role in the dissipation of air pollutants horizontal play streams.

The software can be successfully used for the study, analysis and prediction of the spread of harmful substances in the atmosphere for further decisions on the optimal design of new industrial facilities, as well as environmental planning.

References

- [1] Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. – М.: ИВМ РАН, 2002. – 201с.
- [2] Чуб А.И. Математическая модель оптимизационной задачи размещения пожароопасных объектов с учетом рельефа области размещения // Радиоэлектроніка, інформатика, управління выпуск. – 2013. – № 1. – С. 88-93.
- [3] Kordzadze A. Mathematical modelling of dynamical and ecological processes in the system sea-land-atmosphere // Air, Water and Soil Quality Modelling for Risk and Impact Assessment. – 2007. – Pp. 181-193.
- [4] Sharan M., Gopalakrishnan S.G. Mathematical modeling of diffusion and transport of pollutants in the atmospheric boundary layer // January pure and applied geophysics. – 2003. – Vol. 160. – Issue 1-2. – Pp. 357-394.
- [5] Khan Y., Shekhu M., Sulochana C. Mathematical model for dispersion and diffusion of chemically reactive pollutants from various sources into a boundary layer with dry deposition // Engineering Computations. – 2013. – Vol. 30. – Issue 5. – Pp. 707 – 727.
- [6] Лайтхман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. – 2-е изд. – Л.: Гидрометеоиздат, 1970. – 341с.
- [7] Алоян А.Е. Математическое моделирование взаимодействия газовых примесей и аэрозолей в атмосферных дисперсных системах // Вычислительная математика и математическое моделирование: Материалы междунар. конф. – М., 2000. – Т.1. – С. 214-230.
- [8] Данченко В.К., Илев Л.С. Об идентификации аэрозолей разного происхождения // Естественные и антропогенные аэрозоли: Материалы 3-й международной конференции. – СПб., 2001. – С.41-52.
- [9] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
- [10] Дымников В.П. Метод функции Грина в нелинейных задачах физики атмосферы // Вычислительная математика и математическое моделирование: Материалы международной конференции. – М., 2000. – Т.1. – С. 99-110.
- [11] Sharipov D.K. Development of mathematical software aerosol transport and diffusion of the atmospheric emissions // European Applied Sciences. – Stuttgart : ORT Publishing, 2013. – № 1. – Vol. 1. – Pp. 233-240.
- [12] Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N. A Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Modeling and Optimization. – 2015. – Vol. 3. – No. 2. – Pp. 35-39.
- [13] Равшанов Н., Шарипов Д.К. Исследование загрязнения окружающей среды Ахангаранского региона в зависимости от погодно-климатических особенностей // Узб.журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2013. – № 5-6. – С.33-39.

UDC 519.633

STABILITY OF EXPLICIT FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR HYPERBOLIC SYSTEM

Aloev R.D.

D.Sc., professor, head of the «Computer technology and information systems» department,
National University of Uzbekistan,
tel.: + (99893) 567-51-07, e-mail: aloevr@mail.ru

Xudoyberganov M.U.

Ph.D., head of the center of information technologies,
National University of Uzbekistan,
tel.: + (99899) 821-06-71, e-mail: mirzoali@mail.ru

The article describes and examines modern numerical methods for the numerical solution of partial differential equations of hyperbolic systems (shortly hyperbolic system). Hyperbolic equations can be found in many areas of physics and mechanics, such as acoustics, fluid dynamics, elasticity theory, magneto-hydrodynamics, shallow water equations, and others. The article is designed for researchers who are faced with the necessity of solving hyperbolic systems in various areas of mechanics, physics and applied mathematics. The feature of the article is to present and classify the different numerical methods expounded on the basis of a single common approach. The article aims to provide a set of reliable modern numerical methods to solve linear and nonlinear hyperbolic systems of partial differential equations in one-dimensional and multidimensional cases. Some well-known difference schemes such as Godunov, Lax and Rusanov are discussed, and new explicit finite difference schemes are suggested.

Keywords: difference scheme, hyperbolic system, stability, approximation.

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ**
Алоев Р.Д., Худойберганов М.У.

Рассматриваются современные численные методы решения уравнений в частных производных гиперболических систем. Гиперболические системы встречаются во многих областях физики и механики, такие как акустика, гидродинамика, теория упругости, магнитная гидродинамика, уравнения мелкой воды и др. Статья предназначена для исследователей, которые сталкиваются с необходимостью решения гиперболических систем в различных областях механики, физики и прикладной математики. Особенностью работы является представление и классификация различных численных методов (явные разностные схемы), изложенных на основе единого общего подхода. Также исследуется вопрос устойчивости некоторых известных разностных схем, таких как схема Годунова, Лакса и Русанова, а также новые явные разностные схемы.

Ключевые слова: разностная схема, гиперболическая система, устойчивость, аппроксимация.

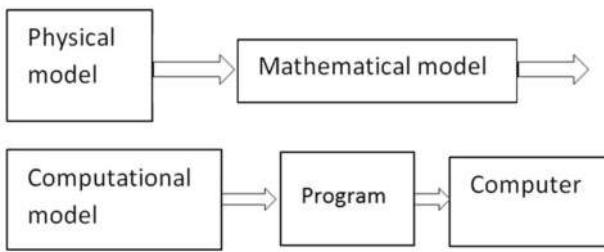
**GIPERBOLIK SISTEMALAR UCHUN
OSHKOR AYIRMALI SXEMALARING TURG'UNLIGI**
Aloyev R.D., Xudoyberganov M.U.

Maqolada giperbolik tipdag'i xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasining (giperbolik sistemalarining) sonli yechimlarini topish uchun zamonaviy hisoblash metodlari quriladi va tadqiq etiladi. Giperbolik tenglamalar sistemasi fizikaning turli sohalarida, akustika, gaz dinamikasi, elastiklik nazariyasi, magnit gidrodinamikasi, mayda suv tenglamalari va boshqa sohalarda uchraydi. Turli sonli metodlarni yagona yondashuv orqali tadqiq etish maqsadida maqolada bir o'lchovli va ko'p o'lchovli xususiy hosilali chiziqli va chiziqsiz giperbolik tenglamalar yechishda qo'llaniladigan ishchonchli zamonaviy hisoblash metodlarini yaratishga harakat qilingan. Godunov, Laks, Rusanov va yangi oshkor ayirmali sxemalarining turg'unligi tadqiq etilgan. Maqoladagi natijalar dastlabki differensial masala yechimining mavjud va yagonaligini ta'minlaydi.

Tayanch iboralar: ayirmali sxema, giperbolik sistema, turg'unlik, approksimasiya.

1. Introduction

In the recent decades, methods of mathematical modeling are widely used in science. By mathematical modeling we understand the following logic chain:



Direct application of methods of mathematical modeling is impossible without a detailed analysis of the relations between the mathematical and computational models of a phenomenon. Note that in the theory of differential equations there already exist the approach of simultaneous study of the original mathematical problem and its discrete (finite-difference) analog, for instance, the fundamental work [1] as well as the monographs [2, 3].

For the construction and investigation of computational modeling, we require the conformity of computational model of original differential problems. By conformity we understand that the computational model should be constructed in order to prove the theorem of existence of the solutions to the original differential problem. This is really important because in numerical calculations we have to be sure that the approximate solutions do converge to the solution of the original differential problem.

For modeling an original problem mathematically, we consider an initial boundary value problem for symmetric t -hyperbolic systems with dissipative boundary conditions (see [2, §15]). For clarity we confine one dimensional problem.

We consider general symmetric hyperbolic systems.

Definition 1: The system of N equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} + Du = f \quad (1)$$

for the N unknown functions $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ with the matrices

$$C = \|c_{ik}\| = \|c_{ik}(x, t)\|, D = \|d_{ik}\| = \|d_{ik}(x, t)\|$$

is called hyperbolic if all the roots of the characteristic equation $\det\|C - kE\| = 0$ (E is the identity matrix) are real and distinct.

In [2] it is shown that the system (1) leads to some special canonical form

$$\frac{\partial v}{\partial t} + K \frac{\partial v}{\partial x} + Mv = g, \quad (2)$$

where K is a diagonal matrix and the nondegenerate matrix Z is

$$Z^{-1}(DZ + \frac{\partial}{\partial t}Z + C\frac{\partial}{\partial x}Z) = M,$$

$$Z^{-1}f = g; v = Z^{-1}u$$

Suppose that the elements of the matrix K are ordered as follows

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ 0 & & O_3 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_{N_0} \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -k_{N_0+1} & & & 0 \\ & -k_{N_0+2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -k_{N_0+N_1} \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

where $k_i > 0, i = 1, \dots, N_0 + N_1; N_0 + N_1 + N_2 = N$.

The system (2) can be rewritten as follows

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + B \frac{\partial v}{\partial x} + Qv = F, \quad (2')$$

where $B = AK, Q = AM, F = Ag$ and

$$A = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_{N_0+N_1}}, 1, \dots, 1 \right\}.$$

Consider the region $0 \leq x \leq l, t \geq 0$. The solution of (2) with the boundary conditions at $x = 0$

$$V^I = SV^{II} + g^I \quad (3)$$

and at $x = l$

$$V^{II} = RV^I + g^{II}. \quad (4)$$

The initial data for this problem are given in the form

$$v_i(x, 0) = \phi_i(x), 0 \leq x \leq l, (i = 1, \dots, N). \quad (5)$$

Here

$$V^I = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N_0} \end{pmatrix}, \quad V^{II} = \begin{pmatrix} v_{N_0+1} \\ v_{N_0+2} \\ \vdots \\ v_{N_0+N_1} \end{pmatrix},$$

$$g^I = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N_0} \end{pmatrix}, \quad g^{II} = \begin{pmatrix} g_{N_0+1} \\ g_{N_0+2} \\ \vdots \\ g_{N_0+N_1} \end{pmatrix}$$

S is a rectangular matrix of dimension $N_1 \times N_0$, R is a rectangular matrix of dimension $N_0 \times N_1$ and

$$k_i = k_i(t, x), g_i = g_i(t), S = \|S_{kl}\| = \|S_{kl}(t)\|,$$

$$R = \|R_{kl}\| = \|R_{kl}(t)\|,$$

$$\phi_k(x), i = 1, \dots, N_0 + N_1, k, l = 1, \dots, N$$

are given functions.

Definition 2. Problem (2)-(5) is called mixed, as for the solution it requires not only the initial conditions, but also the boundary conditions.

Definition 3. (a) The boundary conditions (3) at $x=0$ are called dissipative if at the boundary points for any vector function (v_1, v_2, \dots, v_N) satisfying the boundary conditions (3), the following inequality (at $g^1 \equiv 0$) holds

$$-(Bv, v) \Big|_{x=0} = -\sum_{i=1}^{N_0} v_i^2 + \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} v_i^2 \geq 0. \quad (6)$$

(b) The boundary conditions (4) at $x=l$ are called dissipative if at the boundary points for any vector function (v_1, v_2, \dots, v_N) satisfying the boundary conditions (4), the inequality (at $g^{11} \equiv 0$)

$$(Bv, v) \Big|_{x=l} = \sum_{i=1}^{N_0} v_i^2 - \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} v_i^2 \geq 0 \quad (7)$$

is true.

Definition 4. The boundary conditions (3)-(4) are called strictly dissipative for the system (2) if for any nonzero vector function (v_1, v_2, \dots, v_N) satisfying the boundary conditions (3)-(4), and the following inequalities, with $g^{11} \equiv 0, g^1 \equiv 0$

$$-\sum_{i=1}^{N_0} v_i^2 + \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} v_i^2 \geq k_0 \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} v_i^2, \quad (8)$$

at $x=0$ with the constant $k_0 > 0$ and

$$-\sum_{i=1}^{N_0} v_i^2 - \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N_1} v_i^2 \geq k_l \sum_{i=1}^{N_0} v_i^2, \quad (9)$$

at $x=l$ with the constant of $k_l > 0$.

Problem 1. Show that, with the appropriate choice of functions $\mu_i(t, x)$, $i=1, \dots, N$ for the new dependent variables $w_i = \mu_i v_i$, $i=1, \dots, N$, the boundary conditions is dissipative, where constants k_0 and k_l are arbitrarily close to unity.

Hint. In the mixed problem (2)-(5), we need to introduce new dependent variables $w_i = \mu_i v_i$, $i=1, \dots, N$, and therefore the boundary conditions (2) and (3) can be written as

$$W^1 = M^{11} S(M^{11})^{-1} W^{11} + M^1 g^1 \text{ at } x=0,$$

$$W^{11} = M^{11} R(M^1)^{-1} W^1 + M^{11} g^{11}, \text{ at } x=l,$$

where

$$M^1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{N_0} \end{pmatrix}, \quad M^{11} = \begin{pmatrix} \mu_{N_0+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{N_0+N_1} \end{pmatrix}.$$

Problem 2. Show that the dissipativity of the boundary conditions is equivalent to the matrix inequalities

$$I_{N_1} - S^* S \geq 0, \quad I_{N_0} - R^* R \geq 0,$$

and the strictly dissipativity of boundary conditions is equivalent to the matrix inequalities

$$I_{N_0} - S^* S \geq k_0 I_{N_1}, \quad I_{N_0} - R^* R \geq k_l I_{N_0},$$

where I_{N_0} and I_{N_1} are the unit matrix of dimension N_0 and N_1 respectively.

Problem 3. Suppose the boundary conditions (2)-(3) are not dissipative, then by introducing the new unknown functions show that it can be made dissipative.

Definition 5. The system of equations

$$A(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t, u)$$

is called symmetric t -hyperbolic system, if the matrices A and B are symmetric, and the matrix A is positive.

Thus, in one dimensional hyperbolic system (1) after transforming it into the canonical form (2), is symmetric t -hyperbolic.

Now we derive the energy integral identity for symmetric t -hyperbolic systems. This identity plays a major role in the study of stability of difference schemes. We restrict ourselves to linear systems. For the function

$$I(t) = \int_0^l (Av, v) dx,$$

we have the inequality (see [2])

$$I(t_2) \leq I(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} [MI(t) + N\sqrt{I(t)}] dt. \quad (10)$$

Lemma 1.1 (integral inequality [2]). Assume that for $0 \leq t \leq T$ the function $I(t) \geq 0$ is continuous and differentiable, and for any $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, $I(t)$ satisfies the inequality (10) with $M > 0$, $N \geq 0$ then

$$\sqrt{I(t)} \leq \sqrt{I(0)} e^{\frac{M}{2}t} + \frac{N}{M} (e^{\frac{M}{2}t} - 1). \quad (11)$$

In the following, we will construct the discrete analogues of (11) for the various difference schemes, which can be used to prove the theorem of existence and uniqueness of the solution of the mixed problem (2)-(5).

Problem 4. Find the estimation for the solution of the mixed problem (1)-(4) of the type (11) in the case $g^1 \neq 0$ and $g^{11} \neq 0$.

In [2] the following theorem of existence unique and uniqueness for the solutions of the mixed problem (1)-(4) is proved.

Theorem 1.1. Let

(a) the coefficients and the right-hand sides of (2), the coefficients of the boundary conditions (3)-(4) are smooth;

(b) the boundary conditions (3)-(4) is dissipative;

(c) the initial data $\phi_i(x)$, $i=1, \dots, N$ are smooth and consistent with the boundary conditions together with its derivatives of sufficiently high order.

Then there exists a unique solution of the mixed problem (2)-(5) in rectangle $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

2. Lax's difference scheme

Consider the mixed problem (2)-(5) in the case of constant coefficients, ie, elements of the matrices A , B , Q , S , R are constants. It will be shown later the obtained results in the following analysis can be extended to the variable coefficients. In the region

$\bar{G} = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$ we construct the difference grid with steps size $\Delta t = \Delta$, $\Delta x = h$ ($T = m\Delta$). In Fig. 1, the internal points marked by crosses are denoted by G_h , circles are taken along the boundary Ω_h , squares and triangles are taken along Γ_h^0 and Γ_h^l , respectively. In addition the whole set of grid points $(k\Delta, ih)$, $k = 0, \dots, m$; $i = 0, \dots, n$ is denoted by \bar{G}_h . Note that $\bar{G}_h = G_h \cup \Gamma_h^0 \cup \Gamma_h^l \cup \Omega_h$.

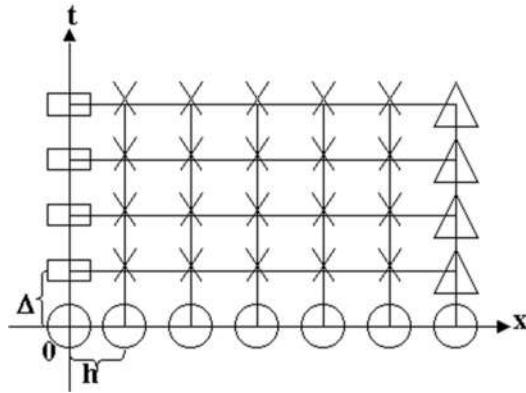


Fig. 1

We will call the sets Γ_h^0 and Γ_h^l are the left and right borders of the difference grid, respectively. Let U_i^k denote the approximate solution of the mixed problem (2)-(5) at the point $(k\Delta, ih)$ of the difference grid $\bar{\Omega}_h$, $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$. For the steps ratio Δ/h we use the standard notation r. Lax's difference scheme for the mixed problem (2)-(5) is formulated as follows:

$$AU_i^{k+1} = \frac{1}{2}A(U_{i+1}^k + U_{i-1}^k) - \frac{1}{2}rB(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k) - \Delta \cdot Q \cdot U_i^k + \Delta \cdot F_i^k, \quad (12)$$

$$k = 0, \dots, m-1; i = 1, \dots, n-1,$$

$$(U^I)_0^k = S \cdot (U^H)_0^k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (13)$$

$$(U^H)_n^k = R \cdot (U^I)_n^k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$U_i^0 = \phi(i \cdot h), \quad i = 0, \dots, n \quad (15)$$

where

$$U_i^k = ((U^I)_i^k, (U^H)_i^k, (U^H)_i^k)^*,$$

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^*.$$

Thus, to determine the numerical solution, we have a system of linear algebraic equations (12)-(15) for the unknowns $\{U_i^k\}, (k \cdot \Delta, i \cdot h) \in \bar{G}_h$. However, it is not difficult to see that this system is not closed to the borders Γ_h^0 and Γ_h^l , i.e. the resulting system of linear algebraic equations is insufficient to determine the $U = \{U_i^k\}$. Therefor the additional boundary conditions need to be constructed [5]. First, we need to count how many conditions are needed for the system to be closed. The number of unknowns is equal to $(n+1)(m+1)N$, and the number of equations (13)-(15) is equal to

$$[(n+1)(m+1)N - m(N_1 + N_2) - m(N_0 + N_2)].$$

Thus, it is necessary to set $m(N_1 + N_2)$ on the left boundary conditions Γ_h^0 and $m(N_0 + N_2)$ on the right boundary conditions Γ_h^l in order to uniquely determine an approximate solution of U . Namely it is necessary to set the conditions for determining the vector components

$$(U^H)_0^k, (U^H)_0^k, (U^I)_n^k, (U^H)_n^k, \quad k = 0, \dots, m.$$

We propose the following options on how to define the additional boundary conditions:

$$(U^H)_0^{k+1} = (U^H)_1^k, (U^H)_0^{k+1} = (U^H)_1^k, \quad (16)$$

$$k = 0, \dots, m-1,$$

$$(U^I)_n^{k+1} = (U^I)_{n-1}^k, (U^H)_n^{k+1} = (U^H)_{n-1}^k, \quad (17)$$

$$k = 0, \dots, m-1,$$

or

$$(U^H)_0^k = (U^H)_1^k, (U^H)_0^k = (U^H)_1^k, \quad (16')$$

$$k = 0, \dots, m,$$

$$(U^I)_n^k = (U^I)_{n-1}^k, (U^H)_n^k = (U^H)_{n-1}^k, \quad (17')$$

$$k = 0, \dots, m,$$

It should be noted that the whole difference scheme (12)-(17) (or (12)-(15), (16), (17)) has a first-order approximation, although in $G_h \cup \Omega_h$ the second-order approximation is also arised.

Theorem 2.1. Let

$$r|\lambda_i(B)| < \lambda_i(A), \quad i = 1, \dots, N, \quad (18)$$

where $\lambda_i(A)$ and $\lambda_i(B)$, $i = 1, \dots, N$ are the eigenvalues of the matrix A and B , respectively. Then the difference scheme (12)-(15), (16), (17'), (12)-(17) is stable in the energy norm $\sqrt{\mathfrak{J}_k}(\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_k})$, where

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_k &= \tilde{\mathfrak{J}}_k + \frac{1}{2}h\{(A^H[U^H]_0^k, [U^H]_0^k) + \\ &+ ([A^H + r \cdot I_{N_1}] [U^H]_0^k, [U^H]_0^k) + \\ &+ ([A^H [U^H]_n^k, [U^H]_n^k] + \\ &+ ([A^I + r \cdot I_{N_0}] [U^I]_n^k, [U^I]_n^k]) \\ &\tilde{\mathfrak{J}}_k = h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (A \cdot U_i^k, U_i^k) \end{aligned}$$

and I_{N_0} is the identity matrix of order N , and so on.

Proof. First, consider the difference scheme (12)-(17). To prove its stability, the technique of constructing difference analogue of a dissipative integral energy is applied, that allows us to get the energy inequality, from which the stability of the difference scheme follows.

Rewrite the system of equations (12) in the form

$$AU_i^{k+1} = D_1 U_{i+1}^k + D_2 U_{i-1}^k - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k, \quad (19)$$

$$\text{where } D_1 = \frac{1}{2}(A - rB), \quad D_2 = \frac{1}{2}(A + rB).$$

By (18) the matrix $D_i > 0$, $i = 1, 2$. For the symmetric positive definite matrix the following chain of inequalities takes place

$$\begin{aligned} (DU, V) &= (D^{\frac{1}{2}}U, D^{\frac{1}{2}}V) \leq \\ &\leq \sqrt{(DU, U)} \sqrt{(DV, V)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(DU, U) + \frac{1}{2}(DV, V), \end{aligned}$$

where U, V are vectors of dimension N . Multiply the system (19) from the right by the vector U_i^{k+1}

$$(AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) = (D_1 U_{i+1}^k, U_i^{k+1}) + (D_2 U_{i-1}^k, U_i^{k+1}) - \Delta(Q U_i^k, U_i^{k+1}) + \Delta(F_i^k, U_i^{k+1})$$

Applying the above inequality to the quadratic form $(D_1 U_{i+1}^k, U_i^{k+1})$, $(D_2 U_{i-1}^k, U_i^{k+1})$, gives

$$\begin{aligned} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) &\leq \frac{1}{2}(D_1 U_{i+1}^k, U_{i+1}^k) + \frac{1}{2}(D_2 U_{i-1}^k, U_{i-1}^k) + \\ &+ \frac{1}{2}([D_1 + D_2] U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) - \\ &- \Delta(Q U_i^k, U_i^{k+1}) + \Delta(F_i^k, U_i^{k+1}). \end{aligned}$$

Using the following obvious relation and inequalities

$$(1) \quad D_1 + D_2 = A,$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |(Q \cdot U_i^k, U_i^{k+1})| &\leq \|Q\| \cdot \|U_i^k\| \cdot \|U_i^{k+1}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|Q\| \cdot ((U_i^k, U_i^k) + (U_i^{k+1}, U_i^{k+1})), \end{aligned}$$

$$(3) \quad |(F_i^k, U_i^{k+1})| \leq \frac{1}{2}((F_i^k, F_i^k) + (U_i^{k+1}, U_i^{k+1})),$$

where $\|Q\| = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |q_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, is the Euclidean norm of Q , we obtain

$$\begin{aligned} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) &\leq (D_1 U_{i+1}^k, U_{i+1}^k) + (D_2 U_{i-1}^k, U_{i-1}^k) + \\ &+ \Delta\{(\|Q\|(U_i^k, U_i^k) + (\|Q\|+1)(U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + \\ &+ (F_i^k, F_i^k))\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Multiply both sides of the inequality (20) by h and sum over i from 1 to $n-1$

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^{n-1} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) &\leq h \sum_{i=1}^{n-1} [(D_1 U_{i+1}^k, U_{i+1}^k) + \\ &+ (D_2 U_{i-1}^k, U_{i-1}^k)] + \Delta h \sum_{i=1}^{n-1} \{(\|Q\|(U_i^k, U_i^k) + \\ &+ (\|Q\|+1)(U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + (F_i^k, F_i^k))\}. \end{aligned}$$

Applying the following relations and inequality:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (D_1 \cdot U_{i+1}^k, U_{i+1}^k) = \sum_{i=1}^{n-1} (D_1 \cdot U_i^k, U_i^k) - \\ - (D_1 \cdot U_1^k, U_1^k) + (D_1 \cdot U_n^k, U_n^k),$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (D_2 \cdot U_{i-1}^k, U_{i-1}^k) = \sum_{i=1}^{n-1} (D_2 \cdot U_i^k, U_i^k) + \\ + (D_2 \cdot U_0^k, U_0^k) - (D_2 \cdot U_{n-1}^k, U_{n-1}^k),$$

$$(3) \quad (U_i^k, U_i^k) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} (A \cdot U_i^k, U_i^k),$$

where $\lambda_{\min}(A) = \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(A)$, gives

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^{n-1} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) &\leq h \sum_{i=1}^{n-1} (AU_i^k, U_i^k) + \\ &+ h(D_2 U_0^k, U_0^k) - h(D_2 U_1^k, U_1^k) - \\ &- h(D_2 U_{n-1}^k, U_{n-1}^k) + h(D_2 U_n^k, U_n^k) + \\ &+ \Delta h \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\|Q\|+1}{\lambda_{\min}(A)} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + \right. \\ &\left. + \frac{\|Q\|}{\lambda_{\min}(A)} (AU_i^k, U_i^k) \right\} + \\ &+ \max_{0 \leq k \leq m} h \sum_{i=1}^{n-1} (F_i^k, F_i^k). \end{aligned} \quad (21)$$

Denoting

$$\Phi = \max_{0 \leq k \leq m} h \sum_{i=1}^{n-1} (F_i^k, F_i^k),$$

$$\mu_1 = \frac{\|Q\|+1}{\lambda_{\min}(A)}, \quad \mu_2 = \frac{\|Q\|}{\lambda_{\min}(A)},$$

the inequality (2.10) gives

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} &\leq \tilde{\mathfrak{I}}_k + h\{K_1 + K_2\} + \\ &+ \Delta\{\mu_1 \tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} + \mu_2 \tilde{\mathfrak{I}}_k + \Phi\} \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$K_1 = (D_2 U_0^k, U_0^k) - (D_1 U_1^k, U_1^k),$$

$$K_2 = (D_1 U_n^k, U_n^k) - (D_2 U_{n-1}^k, U_{n-1}^k).$$

Note that in the energy inequality (22) the boundary conditions, including the additional boundary conditions is not taken into account. For the boundary conditions to take place, consider the quadratic forms K_1 and K_2 , respectively, on the left and right borders, i.e. for the vectors U_0^k and U_n^k , satisfying the boundary, including the additional boundary conditions (13), (14), (16), (17).

First, consider the quadratic form K_1 . Using the boundary conditions (13) and (16), we have:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \{ ([A^I + rI_{N_0}] (U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + \\ &+ ([A^{II} - rI_{N_1}] (U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + \\ &+ (A^{III} (U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - (A^{III} (U^{III})_1^k, (U^{III})_1^k) - \\ &- ([A^I - rI_{N_0}] (U^I)_1^k, (U^I)_1^k) - \\ &- ([A^{II} - rI_{N_1}] (U^{II})_1^k, (U^{II})_1^k) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ -([A^I - rI_{N_1}] (U^I)_0^{k+1}, (U^I)_0^{k+1}) + \\ &+ ([A^{II} - rI_{N_1}] (U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) - \\ &- (A^{III} (U^{III})_0^{k+1}, (U^{III})_0^{k+1}) + (A^{III} (U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - \\ &- ([A^I - rI_{N_0}] (U^I)_1^k, (U^I)_1^k) \}. \end{aligned}$$

Denote $\gamma_0 = \max_{1 \leq k \leq N} \lambda_k(A)$. Then the quadratic form

$$([A^I + rI_{N_0}] (U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - 2r((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) \quad \text{is a negative definite when the vectors } (U^I)_0^k \text{ and } (U^{II})_0^k \text{ satisfy the boundary condition (13), provided that}$$

$$k_0 > \frac{\gamma_0 - r}{\gamma_0 + r} \quad (23)$$

where k_0 is the coefficient of dissipativity (see. (8)).

Indeed,

$$\begin{aligned} & ([A^I + rI_{N_0}])(U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + 2r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) \leq \\ & \leq (r + \gamma_0)((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - 2r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) = \\ & = -(r + \gamma_0)([I - S^*S])(U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + \\ & + (\gamma_0 - r)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) \leq \\ & \leq [-k_0(r + \gamma_0) + \gamma_0 - r]((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) < 0. \end{aligned}$$

Here we have used the strict dissipative boundary conditions (13). In addition, we note that by (18) we have the following inequality

$$-([A^I - rI_{N_0}])(U^I)_1^k, (U^I)_1^k) < 0.$$

Then, discarding aforementioned negative definite quadratic forms in K_1 instead of equality, the following inequality is obtained

$$K_1 < -E_{k+1} + E_k,$$

where

$$\begin{aligned} E_k = \frac{1}{2} \{ & ([A^H + r \cdot I_{N_1}] \cdot (U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + \\ & + (A^{III} \cdot (U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) \}. \end{aligned}$$

Similarly, the following inequality for the quadratic form K_2 is obtained as

$$K_2 < -M_{k+1} + M_k,$$

where

$$\begin{aligned} M_k = \frac{1}{2} \{ & ([A^I + rI_{N_0}])(U^I)_n^k, (U^I)_n^k) + \\ & + (A^{III}(U^{III})_n^k, (U^{III})_n^k) \}. \end{aligned}$$

The last inequality is proved under the condition that

$$k_l > \frac{\gamma_1 - r}{\gamma_1 + r}, \quad \gamma_1 \max_{N_0+1 \leq k \leq N_0+N_1} \lambda_k(A). \quad (24)$$

Taking into account the inequalities for K_1 and K_2 , from (22) we obtain

$$\mathfrak{J}_{k+1} \leq \mathfrak{J}_k + \Delta \cdot \{\mu_1 \cdot \mathfrak{J}_{k+1} + \mu_2 \cdot \mathfrak{J}_k + \Phi\}. \quad (25)$$

Lemma 2.1. Suppose that a sequence of numbers $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_m$, satisfying (25) for $\forall k$. Then for small Δ the following inequality holds:

$$\mathfrak{J}_k \leq C_0 \mathfrak{J}_0 + C_1 \Phi, \quad (26)$$

where C_0, C_1 are positive constants, independent of

$$\Delta, \quad m = \frac{T}{\Delta}, \quad T = \text{const.}$$

Proof. Rewrite (25) in the form

$$\mathfrak{J}_{k+1} \leq \chi_0 \cdot \mathfrak{J}_0 + \chi_1 \cdot \Phi, \quad (27)$$

where

$$\chi_0 = \frac{1 + \Delta \mu_2}{1 - \Delta \mu_1}, \quad \chi_1 = \frac{\Delta}{1 - \Delta \mu_1}.$$

From the inequality (27) it follows

$$\mathfrak{J}_{k+1} \leq \chi_0^{k+1} \mathfrak{J}_0 + \chi_1 \frac{\chi_0^{k+1} - 1}{\chi_1 - 1} \cdot \Phi.$$

We need to show the magnitude of χ_0^{k+1} is bounded.

Indeed,

$$(1 + \Delta \mu_2)^{k+1} < (e^{\Delta \mu_2})^{k+1} \leq e^{T \mu_2};$$

$$\frac{1}{1 - \Delta \mu_1} < 1 + 2\Delta \mu_1,$$

at small Δ , i.e.

$$(1 - \Delta \mu_1)^{-(k+1)} < (1 + 2\Delta \mu_1)^{k+1} < (e^{2\Delta \mu_1})^{k+1} \leq e^{2T \mu_1}$$

Hence

$$\begin{aligned} \chi_0^{k+1} &< e^{T(\mu_2 + 2\mu_1)} = C_0, \\ \chi_1 \frac{\chi_0^{k+1} - 1}{\chi_0 - 1} &= \frac{\Delta}{1 - \Delta \mu_1} \frac{\chi_0^{k+1} - 1}{\Delta(\mu_1 + \mu_2)} (1 - \Delta \mu_1) = \\ &= \frac{\chi_0^{k+1} - 1}{\mu_1 + \mu_2} < \frac{e^{T(\mu_2 + 2\mu_1)} - 1}{\mu_1 + \mu_2} = C_1. \end{aligned}$$

Lemma 2.1 is proved. Inequality (27) implies the stability of difference scheme (12)-(17) in the energy norm $\sqrt{\mathfrak{J}_k}$. We now consider the difference scheme (12)-(15), (16), (17). In this case

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{1}{2} \{ & -([A^I + rI_{N_0}])(U^I)_1^k, (U^I)_1^k) + \\ & + ([A^I + rI_{N_0}])(U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - \\ & - 2r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) \} \leq \\ & \leq -2r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + \\ & + ([A^I + rI_{N_0}])(U^I)_0^k, (U^I)_0^k) < 0. \end{aligned}$$

Similarly we can prove that $K_2 < 0$. In deriving these inequalities, we used the strictly dissipative boundary conditions (23) and (24) and inequality (18). From (22), we obtain

$$\tilde{\mathfrak{J}}_{k+1} \leq \tilde{\mathfrak{J}}_k + \Delta \{\mu_1 \tilde{\mathfrak{J}}_{k+1} + \mu_2 \tilde{\mathfrak{J}}_k + \Phi\},$$

and by Lemma 2.1.

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k \leq C_0 \tilde{\mathfrak{J}}_0 + C_1 \Phi.$$

The theorem is proved.

Note that the condition (18) is the Courant-Friedrichs-Levy (CFL) condition, and it is a necessary condition [6]. Whereas we have proved that it is not only a necessary but also a sufficient condition for the stability of difference scheme.

Since the difference scheme (12)-(15), (16), (17) or (12)-(17) are explicit, numerical algorithm for finding an approximate solution is quite simple. If the values $\{U_i^k\}$ of a k^{th} layer of points are known, from the formulas (16) and (17), the values $(U^H)_0^{k+1}, (U^{III})_0^{k+1}, (U^I)_n^{k+1}, (U^{III})_n^{k+1}$ are found. Then by (13) and (14) we can define $(U^I)_0^{k+1}$ and $(U^H)_n^{k+1}$. The formula (12) allows us to calculate U_i^{k+1} for all interior points ($i = 1, \dots, n-1$), for the $(k+1)^{th}$ layer. Since U_i^0 are known from the initial data (15), the values for U_i^1, U_i^2 , etc. can be determined.

To find the numerical solution of the scheme (12)-(15), (16), (17), you must change the order of finding a solution at the boundary points and at interior points of difference grid in the above algorithm. Suppose that the values $\{U_i^k\}$ for k^{th} layer points are known. According

to (12), we can find U_i^{k+1} for all interior points ($i=1,\dots,n-1$), and by (16), (17), (13) and (14) we define U_0^{k+1} and U_n^{k+1} . Next step is to follow the above algorithm, i.e. from the known initial data U_i^0 (15), the values for U_i^1 , U_i^2 , etc. can be determined.

Example. In the region

$\Omega = \{(t, x) : 0 < t \leq 1, 0 < x < 1\}$ consider the system

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2\pi} u_x - \frac{\alpha}{2\pi} u + v = e^{\beta x+a} \cos(t+2\pi x), \\ v_t + \frac{1}{2\pi} v_x - \frac{\beta}{2\pi} v + u = e^{\alpha x} \cos(t-2\pi x) \end{cases}$$

with the boundary conditions

$$u(t, 0) = Sv(t, 0), \quad v(t, 1) = Ru(t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

and the initial data

$$u(0, x) = e^{\alpha x} \cos 2\pi x,$$

$$v(0, x) = e^{\beta x+a} \cos 2\pi x,$$

where a, α, β, S, R are constants, and $S = e^{-a}$, $R = e^{\beta+a-\alpha}$. Then the condition of dissipative boundary conditions are formulated in the form of inequalities $a \geq 0$, $\alpha \geq a + \beta$.

For the numerical calculation, we apply the difference scheme (12)-(17). The Mathcad's code is displayed in the Appendix 1. The numerical results are shown in fig. 2, which shows that the approximate and the exact solutions are in good agreement.

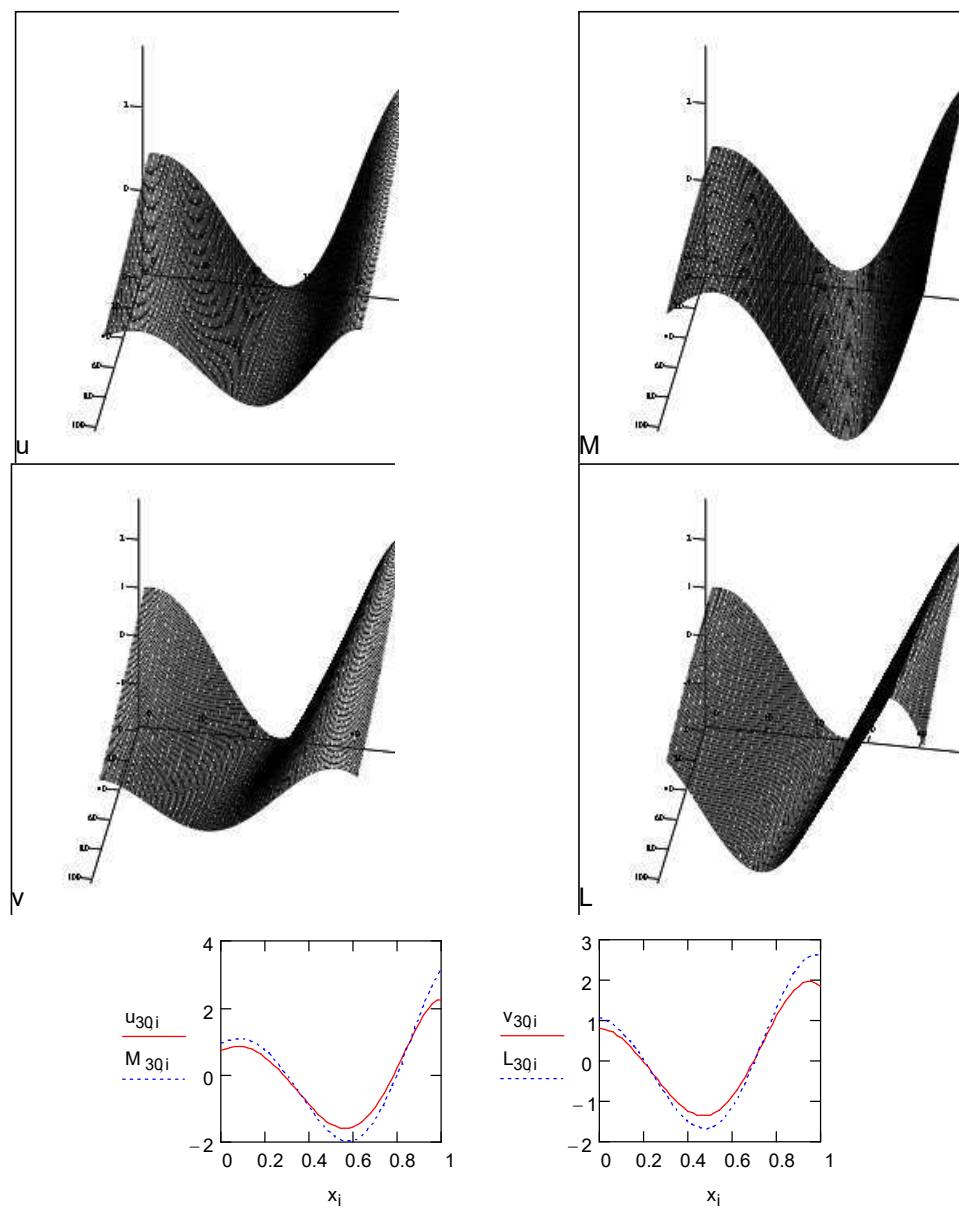


Fig. 2. The exact and approximate solutions in the case of stable difference scheme

3. Godunov's difference scheme

Consider the mixed problem (2')-(5) in the case of constant coefficients. For the numerical solution we consider the Godunov's difference scheme

$$\begin{aligned} AU_i^{k+1} &= AU_i^k - \frac{1}{2}rB(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k) + \\ &+ \frac{1}{2}rC(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k, \quad (28) \\ k &= 0, \dots, m-1; \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

with boundary conditions (12), (14), (16), (17) (or (13), (14), (16'), (17')) and the initial data (15). Here

$$C = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N_0 + N_1}, 0, \dots, 0).$$

Note that in Godunov's scheme the approximate solution of U_i^k can be found in G_h , without specifying the additional boundary conditions if the conditions (3) and (4) is approximated as follows

$$(U^I)_0^k = S(U^H)_1^k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (29)$$

$$(U^H)_n^k = R(U^I)_{n-1}^k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (30)$$

However, for the determination of U in \bar{G}_h , we need to define the components of $(U^H)_0^k$, $(U^H)_0^k$, $(U^I)_n^k$, $(U^H)_n^k$ although they will not participate in the approximate solution U of the difference scheme (15), (28)-(30).

Theorem 3.1. Let

$$r < \min_{1 \leq i \leq N_0 + N_1} \lambda_i(A) \quad (31)$$

Then the difference scheme (13)-(17), (28) is stable in the energy norm $\sqrt{M_k}$, and the difference scheme (13)-(17), (28) and (15), (28)-(30) are stable in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_k}$ where

$$M_k = \tilde{\mathfrak{J}}_k + \Delta\{(U^H)_0^k, (U^H)_0^k\} + \{(U^I)_n^k, (U^I)_n^k\}.$$

Proof. Consider the difference scheme (13)-(17), (28). Rewrite the system (28) in the form

$$AU_i^{k+1} = D_1 U_i^k + D_2 U_{i+1}^k + D_3 U_{i-1}^k - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k,$$

where

$$\begin{aligned} D_1 &= A - rC, \quad D_2 = - \\ &- \frac{r}{2}(B - C), \quad D_3 = \frac{r}{2}(B + C). \end{aligned}$$

Note that, by (31) the matrix $D_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Then the following inequality is true (see §2):

$$\begin{aligned} (AU_i^{k+1}, U_i^{k+1}) &\leq (D_1 U_i^k, U_i^k) + (D_2 U_{i+1}^k, U_{i+1}^k) + \\ &+ (D_3 U_{i-1}^k, U_{i-1}^k) + \Delta \{ \|Q\| + 1 \} (U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + \\ &+ \|Q\| (U_i^k, U_i^k) + (F_i^k, F_i^k). \end{aligned}$$

Multiplying both sides by h and summing the resulting expression for i from 1 to $n-1$ (see §2), we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{J}}_{k+1} &\leq \tilde{\mathfrak{J}}_k + h(K_1 + K_2) + \\ &+ \Delta \{ \mu_1 \tilde{\mathfrak{J}}_{k+1} + \mu_2 \tilde{\mathfrak{J}}_k + \Phi \}, \quad (32) \end{aligned}$$

where μ_1, μ_2, Φ are constants.

Consider K_1 and K_2 are in the quadratic forms for the vectors U , satisfying the boundary conditions (13), (14), (16), (17). Then we have

$$\begin{aligned} K_1 &= r((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - r((U^H)_1^k, (U^H)_1^k) = \\ &= r((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - r((U^H)_0^{k+1}, (U_0^{k+1})) = \\ &= -r([I_{N_1} - S^* S](U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- r((U^H)_0^{k+1}, (U^H)_0^{k+1}) + r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) \leq \\ &\leq -r((U^H)_0^{k+1}, (U_0^{k+1})) + r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k). \end{aligned} \quad (33)$$

In obtaining (33), the dissipative boundary condition (7) has been used, whereas in the Lax's difference scheme demanded strictly dissipative boundary conditions ((8) and (9)).

Similarly, we obtain the following inequality for K_2

$$K_2 \leq -r((U^I)_n^{k+1}, (U^I)_n^{k+1}) - r((U^I)_n^k, (U^I)_n^k).$$

Applying Lemma 2.1 to (32), the following energy inequality is obtainable

$$M_k \leq C_0 M_0 + C_1 \Phi, \quad k = 1, \dots, m,$$

where C_0 and C_1 are constants (see Proof of Lemma 2.1). Thus, we have established the stability of difference scheme (13)-(17), (28). Now consider the difference schemes (13)-(15), (16), (17), (28) and (15), (28)-(30). In both cases we have the following inequality

$$\begin{aligned} K_1 &= r((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - r((U^H)_1^k, (U^H)_1^k) = \\ &= -r([I_{N_1} - S^* S](U^H)_1^k, (U^H)_1^k) \leq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Similarly we have

$$K_2 \leq 0 \quad (35)$$

Substitute (34) and (35) into (32) gives

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k \leq C_0 \tilde{\mathfrak{J}}_0 + C_1 \Phi \quad (36)$$

Inequality (36) indicates the stability of the above-mentioned difference schemes in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_k}$. The computational algorithm for finding approximate solutions of the mixed problem (2')-(5) for the difference scheme (13) - (17), (28) or (13)-(15), (16), (17), (28) or (15), (28)-(30) differs slightly from the algorithm of the previous section.

First, consider the difference scheme (13)-(17), (28). Let the value $\{U_i^k\}$ in the k^{th} -layer points be given, then by (16) and (17) we obtain

$$(U^H)_0^{k+1}, (U^H)_0^{k+1}, (U^I)_n^{k+1}, (U^I)_n^{k+1}.$$

Consequently by (13) and (14) we define $(U^I)_0^{k+1}$ and $(U^H)_n^{k+1}$. Hence, the values $U_i^{k+1}; i = 1, \dots, n-1$, for all interior points of the $(k+1)^{\text{th}}$ -layer can be found. Since U_i^0 are known, the values U_i^1, U_i^2 , etc. are obtainable by (15).

The algorithm for finding the solution of the difference scheme (13)-(17), (28) is similar with the algorithm of the difference scheme (12)-(16), (17).

The approximate solution of a mixed problem for the difference scheme (15), (28)-(30) can be found as follows. Suppose that the value of $\{U_i^k\}$ for a points of the k^{th} -layer are known. According to (28), the values

$U_i^{k+1}; i = 1, \dots, n-1$, for all interior points are obtainable. Then by (29) and (30) we define $(U^I)_0^{k+1}$ and $(U^I)_n^{k+1}$. Further, as U_i^0 are known, the values U_i^1, U_i^2 , etc. can be calculated using (15). It should be noted that in the process of finding the solutions of difference scheme (15), (28)-(30) the vector components $(U^I)_0^k, (U^I)_0^k, (U^I)_n^k, (U^I)_n^k$ are not involved.

Nevertheless, in proving the convergence of the numerical solution of the difference scheme, these vector components can be defined, for example, by linear extrapolation.

For the numerical example we solve the problem in Section 2 using Godunov's scheme. Fig.3 shows that the exact and approximate solutions are in excellent agreement.

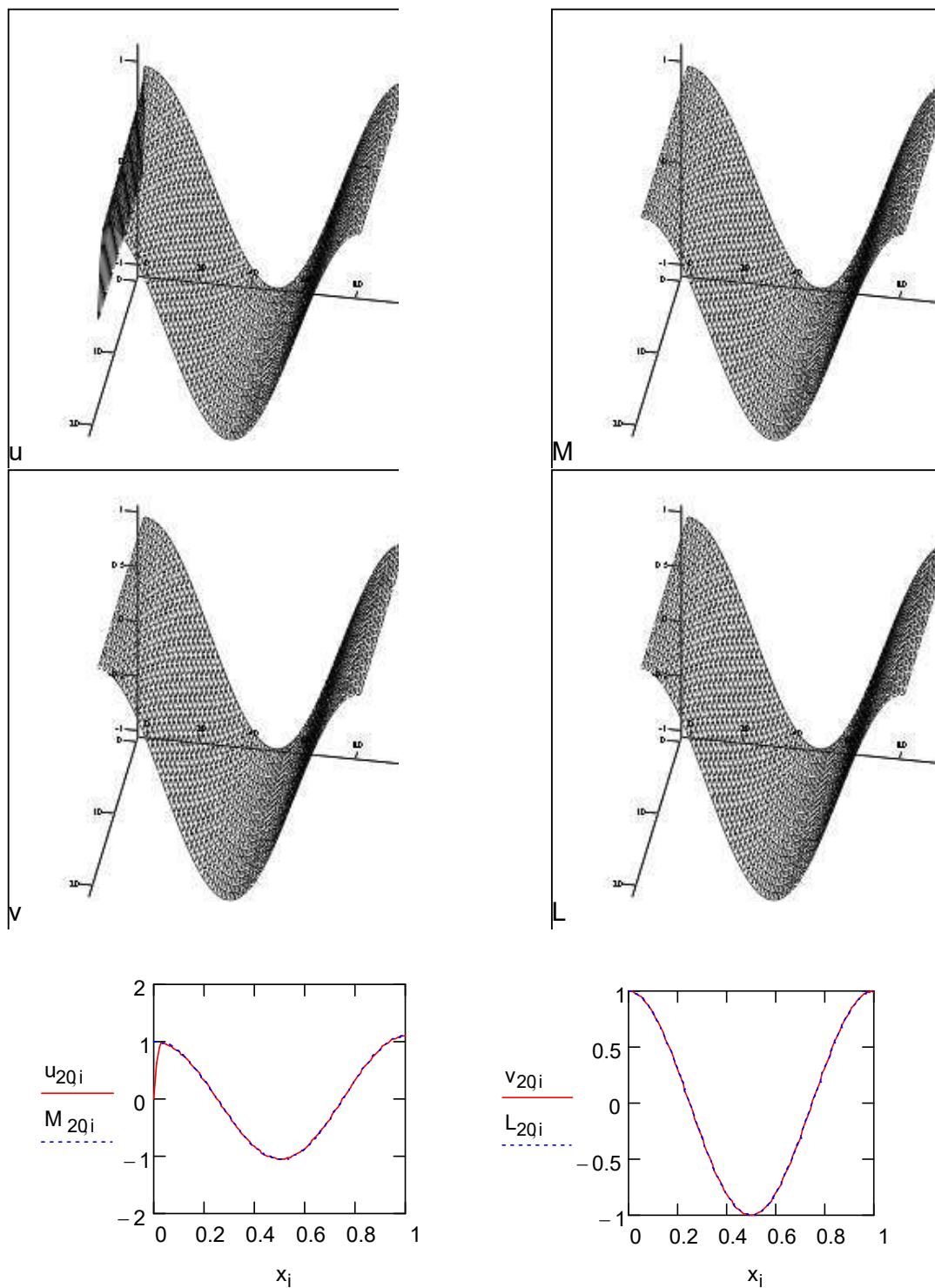


Fig. 3. The exact and approximate solutions for the stable difference scheme

4. Rusanov's difference scheme

Consider the first order accuracy of Rusanov's difference scheme given by

$$\begin{aligned} AU_i^{k+1} &= AU_i^k - \frac{1}{2}rB(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k) + \\ &+ \frac{1}{2}rD(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k, \\ k &= 0, \dots, m-1, \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (37)$$

with the boundary conditions (13), (14), (15), (17) or (13), (14), (16), (17') and the initial data (15), where $D = \omega C$, $\omega > 0$ is a real parameter and C is a diagonal matrix described in §3. Obviously, if $\omega = 1$ then the scheme becomes Godunov's difference scheme.

In this section we will study the influence of the parameter ω to the stability of Rusanov's difference scheme.

Theorem 4.1. Let

$$\omega \geq 1, \quad \text{or } \omega \leq \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(A) \quad (38)$$

Then the difference scheme (13)-(17), (37) is stable in the energy norm $\sqrt{M_k}$, and the difference scheme (13)-(16), (17'), (37) is stable in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathfrak{I}}_k}$, where

$$M_k = \tilde{\mathfrak{I}}_k + \Delta(\omega+1)\{((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + ((U^I)_0^k, (U^I)_0^k)\}.$$

Proof. Rewrite the difference scheme (37) as follows
 $AU_i^{k+1} = D_1 U_i^k + D_2 U_{i+1}^k + D_3 U_{i-1}^k - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k$

where $D_1 = A - rD$, $D_2 = -\frac{r}{2}(B - D)$, $D_3 = \frac{r}{2}(B + D)$. By virtue of (38) the matrix $D_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. We can easily obtain the following inequality (see the Proof of Theorem 3.1)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} &\leq \tilde{\mathfrak{I}}_k + h(K_1 + K_2) + \\ &+ \Delta\{\mu_1 \tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} + \mu_2 \tilde{\mathfrak{I}}_k + \Phi\}, \end{aligned} \quad (39)$$

where

$$K_1 = (D_3 U_0^k, U_0^k) - (D_2 U_1^k, U_1^k),$$

$$K_2 = (D_2 U_n^k, U_n^k) - (D_3 U_{n-1}^k, U_{n-1}^k),$$

and μ_1, μ_2, Φ are constant defined in §2.

We investigate the quadratic forms K_1 and K_2 for the vectors U , satisfying the boundary conditions (13), (14), (16), (17). We have

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{r}{2}(\omega-1)((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) - \\ &- \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_1^k, (U^H)_1^k) + \\ &+ \frac{r}{2}(\omega+1)((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + \\ &+ \frac{r}{2}(\omega-1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) = \\ &= \frac{r}{2}(\omega+1)((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{r}{2}(\omega-1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_0^{k+1}, (U^H)_0^{k+1}) + \\ &+ \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- \frac{r}{2}(\omega-1)((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) = \\ &= -\frac{r}{2}(\omega+1)[(I_{N_1} - S^* S) \cdot (U^H)_0^k, (U^H)_0^k] + \\ &+ \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + \\ &- \frac{r}{2}(\omega+1)((U^H)_0^{k+1}, (U^H)_0^{k+1}) + \\ &+ \frac{r}{2}(\omega-1)((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- \frac{r}{2}(\omega-1)((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) \leq \\ &\leq \frac{r}{2}(\omega+1)\{((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \\ &- ((U^H)_0^{k+1}, (U^H)_0^{k+1})\}, \end{aligned} \quad (40)$$

provided that $k_0 \geq \frac{\omega-1}{\omega+1}$ is the dissipativity coefficient of the left boundary conditions, where we have used the inequality $\omega \geq 1$. Similarly, we obtain the inequality for the quadratic form K_2 given by

$$\begin{aligned} K_2 &\leq \frac{r}{2}(\omega+1)\{((U^I)_n^k, (U^I)_n^k) - \\ &- ((U^I)_n^{k+1}, (U^I)_n^{k+1})\} \end{aligned} \quad (41)$$

where we have set the dissipativity coefficient of the right boundary conditions, $k_1 \leq \frac{\omega-1}{\omega+1}$.

Substituting the right-hand sides of the inequalities K_1 and K_2 into (39), gives the following energy inequality (Lemma 2.1)

$$M_k \leq C_0 M_0 + C_1 \Phi, \quad k = 1, \dots, m,$$

where C_0 and C_1 are constants defined in §3. This means that the difference scheme (13)-(17), (37) is stable. Substituting (13), (14), (16), (17) into (40) and (41) yield

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{r}{2}(\omega+1)((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - \\ &- r((U^H)_0^k, (U^H)_0^k) - \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{r}{2}(\omega-1)((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) \leq 0, \\ &K_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

From (39), using (42) and (43) we obtain the energy inequality

$$\tilde{\mathfrak{I}}_k \leq C_0 \tilde{\mathfrak{I}}_0 + C_1 \Phi, \quad k = 1, \dots, m,$$

which indicates the difference scheme (13), (14), (16), (17'), (37) in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathfrak{I}}_k}$ is stable (Lemma

2.1). The algorithm for finding the approximate solutions of the mixed problem (2')-(5) for the difference scheme (13)-(17), (37) or (13)-(16), (17'), (37) is similar to the algorithm for solving the difference scheme (13)-(17), (28) or (13)-(16), (17'), (28).

Fig. 4 shows the exact and approximate solutions for the example in §2 in case of a stable difference scheme are in excellent agreement.

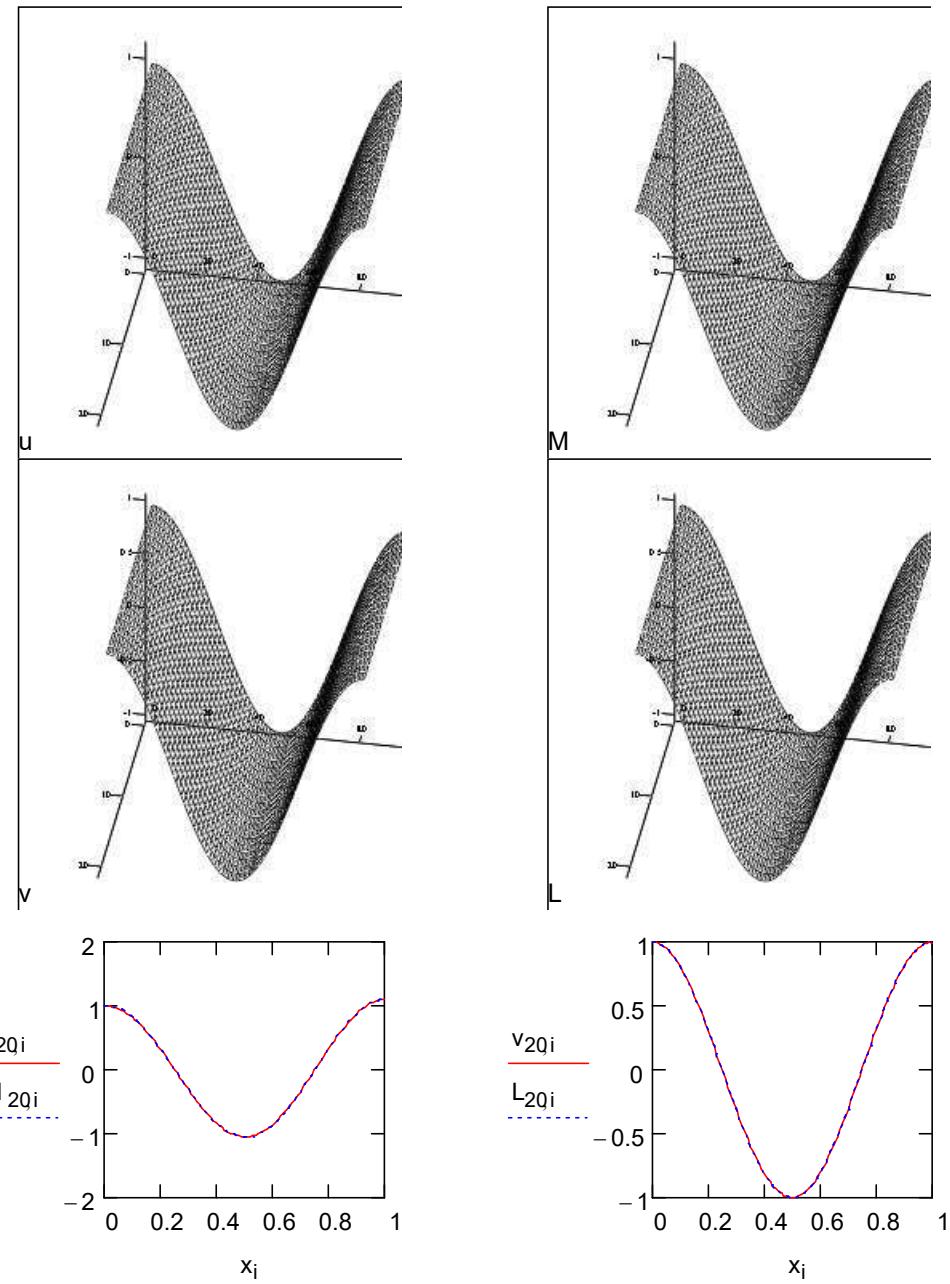


Fig. 4. The exact and approximate solutions for examples of §2 in case of a stable difference scheme

5. One explicit difference scheme

We formulate the difference scheme for the mixed problem (2')-(5). Consider the difference scheme

$$AU_i^{k+1} = AU_i^k - \frac{1}{2}rB(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k) + bA(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k, \\ k = 0, \dots, m-1; i = 1, \dots, n-1,$$

with (44) the boundary conditions (13), (14), (16), (17) or (13), (14), (16), (17') and the initial data (15). Here b is an arbitrary real number.

Theorem 5.1. Let

$$b < \frac{1}{2}, \quad r < 2b \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(A) \quad (45)$$

Then the difference scheme (13) – (17), (44) is stable in the energy norm $\sqrt{M_k}$ and the difference scheme (13) – (16), (17'), (44) is stable in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathcal{Z}}_k}$, where

$$M_k = \tilde{\mathcal{Z}}_k + b\Delta\{(A^H(U^H)_0^k, (U^H)_0^k) + (A^I(U^I)_n^k, (U^I)_n^k) + (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) + (A^{III}(U^{III})_n^k, (U^{III})_n^k)\}.$$

Proof. Rewrite the difference scheme (44) as

$$AU_i^{k+1} = D_1 U_i^k + D_2 U_i^k + D_3 U_{i-1}^k - \Delta Q U_i^k + \Delta F_i^k$$

where

$$D_1 = (1-2b)A, \quad D_2 = bA - \frac{r}{2}B, \quad D_3 = bA + \frac{r}{2}B.$$

By (38) the matrix $D_i \geq 0$, $i=1,2,3$. It is easy to obtain the following inequality (see Proof of Theorem 3.1)

$$\tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} \leq \tilde{\mathfrak{I}}_k + h(K_1 + K_2) + \Delta \left\{ \mu_1 \tilde{\mathfrak{I}}_{k+1} + \mu_2 \tilde{\mathfrak{I}}_k + \Phi \right\}, \quad (46)$$

where

$$K_1 = (D_3 U_0^k, U_0^k) - (D_2 U_1^k, U_1^k),$$

$$K_2 = (D_2 U_n^k, U_n^k) - (D_3 U_{n-1}^k, U_{n-1}^k).$$

Now, consider the difference scheme (13) – (17), (44). Substitute the boundary conditions (13), (14), (16), (17) into the quadratic forms K_1 and K_2 above, we obtain

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\gamma}{2}((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - \\ &\quad -\frac{\gamma}{2}((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + \\ &\quad +\frac{\gamma}{2}((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) - \\ &\quad -\frac{\gamma}{2}((U^{II})_1^k, (U^{II})_1^k) + \\ &\quad +b \cdot (A^I(U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + \\ &\quad +b \cdot (A^{II}(U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + \\ &\quad +b \cdot (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{II}(U^{II})_1^k, (U^{II})_1^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{III}(U^{III})_1^k, (U^{III})_1^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{III}(U^{III})_1^k, (U^{III})_1^k) \leq \\ &\leq \frac{r}{2}((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - \\ &\quad -\frac{r}{2}((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + \\ &\quad +b \cdot \lambda_{\max}(A^I)((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) + \\ &\quad +b \cdot (A^{II}(U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{II}(U^{II})_0^{k+1}, (U^{II})_0^{k+1}) + \\ &\quad +b \cdot (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{III}(U^{III})_0^{k+1}, (U^{III})_0^{k+1}) \leq \\ &\leq \left[-k_0 \left(\frac{r}{2} + b \cdot \lambda_{\max}(A^I) \right) + b \cdot \lambda_{\max}(A^I) \right] \times \\ &\quad \times ((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + b \cdot (A^{II}(U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{II}(U^{II})_0^{k+1}, (U^{II})_0^{k+1}) + b \cdot (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - \\ &\quad -b \cdot (A^{III}(U^{III})_0^{k+1}, (U^{III})_0^{k+1}). \end{aligned}$$

Suppose that the dissipative coefficients of the left boundary conditions, k_0 , satisfies the inequality

$$k_0 \geq \frac{b \lambda_{\max}(A^I)}{\frac{r}{2} + b \lambda_{\max}(A^I)}.$$

Then

$$\begin{aligned} K_1 &= b \{ (A^{II}(U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) - \\ &\quad - (A^{II}(U^{II})_0^{k+1}, (U^{II})_0^{k+1}) + \\ &\quad (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - (A^{III}(U^{III})_0^k, (U^{III})_0^k) - \\ &\quad - (A^{III}(U^{III})_0^{k+1}, (U^{III})_0^{k+1}) \}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\text{where } \lambda_{\max}(A^I) = \max_{1 \leq i \leq N_0} \lambda_i(A^I).$$

Similarly, the dissipativity coefficients of right boundary conditions, k_l , satisfies the inequality:

$$k_l \geq \frac{b \lambda_{\max}(A^{II})}{\frac{r}{2} + b \lambda_{\max}(A^{II})}.$$

Then the following inequality for the quadratic form K_2 is true

$$\begin{aligned} K_2 &\geq b \{ (A^I(U^I)_n^k, (U^I)_n^k) - \\ &\quad - (A^I(U^I)_n^{k+1}, (U^I)_n^{k+1}) + \\ &\quad + (A^{III}(U^{III})_n^k, (U^{III})_n^k) - \\ &\quad - (A^{III}(U^{III})_n^{k+1}, (U^{III})_n^{k+1}) \}. \end{aligned} \quad (48)$$

Then from §4 the energy inequality is given

$$M_k \leq C_0 M_0 + C_1 \Phi,$$

where C_0, C_1, Φ are constants defined in Lemma 2.1.

Consider the difference scheme (13) – (16), (17'), (44). Following the same step as above, we obtain the inequality (46). Substituting the boundary conditions (13), (14), (16) (17') into (47) and (48) yield

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{r}{2} \{ ((U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - 2((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) + \\ &\quad + ((U^I)_1^k, (U^I)_1^k) \} + b(A^I(U^I)_0^k, (U^I)_0^k) - \\ &\quad - b(A^I(U^I)_1^k, (U^I)_1^k) \leq \\ &\leq \{ b \lambda_{\max}(A^I)(1-k_0) \frac{r}{2}(1+k_0) \} \times ((U^{II})_0^k, (U^{II})_0^k) \leq 0, \end{aligned}$$

where

$$k_0 \geq \frac{b \lambda_{\max}(A^I) - \frac{r}{2}}{b \lambda_{\max}(A^I) + \frac{r}{2}}.$$

Similarly, if

$$k_l \geq \frac{b \cdot \lambda_{\max}(A^{II}) - \frac{r}{2}}{b \cdot \lambda_{\max}(A^{II}) + \frac{r}{2}}, \text{ then } K_2 \leq 0.$$

Therefore, from the inequality (46) it follows that the difference scheme (13) – (16), (17'), (44) is stable in the energy norm, $\sqrt{\tilde{\mathfrak{I}}_k}$. Computational algorithm is similar to that described in the preceding section. Fig. 5 shows the exact and approximate solutions for example §2 in the case of stable difference scheme are in excellent agreement.

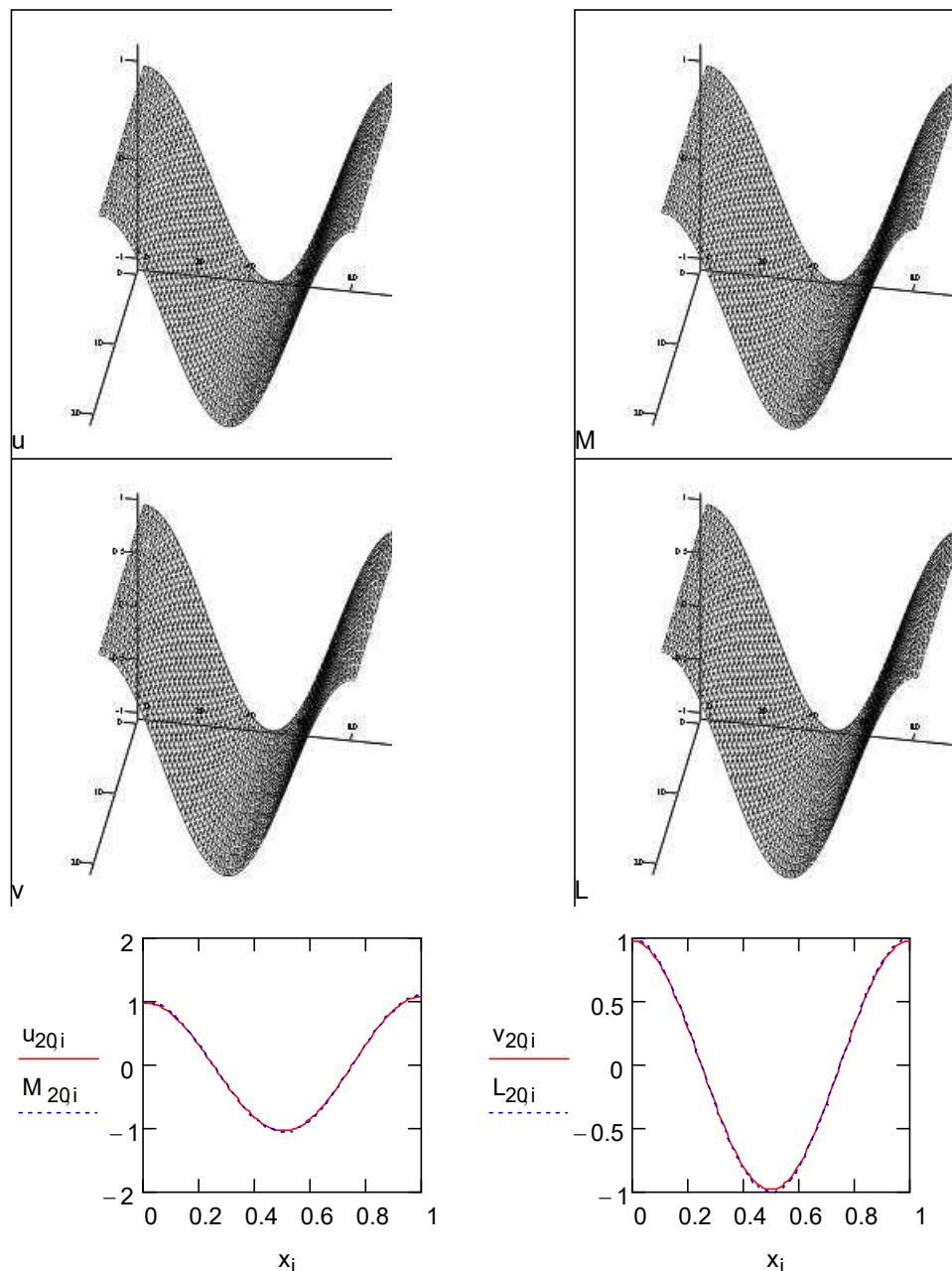


Fig. 5. Exact and approximate solution for examples §2 in the case of stable difference scheme

6. A loop-shaped three-layer scheme

Consider the following three-layer scheme for the mixed problem (2')-(5)

$$\begin{aligned} AU_i^{k+1} &= AU_i^{k-1} - rB(U_{i+1}^k - U_{i-1}^k) + \\ &\quad + 2\Delta Q U_i^k + 2\Delta F_i^k, \end{aligned} \quad (49)$$

$$k = \overline{0, m-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\begin{aligned} [U^I]_0^k + \frac{r}{2}[(U^I)_1^{k+1} + (U^I)_1^{k-1}] &= \\ &= \delta S(U^H)_0^k, \quad k = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} [U^H]_n^k + \frac{r}{2}[(U^H)_{n-1}^{k+1} + (U^H)_{n-1}^{k-1}] &= \\ &= \delta R(U^I)_n^k, \quad k = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$[U^H]_0^k = [(U^H)_1^{k+1} + (U^H)_1^{k-1}] / 2, \quad (52)$$

$$k = \overline{1, m-1},$$

$$[U^I]_n^k = [(U^I)_{n-1}^{k+1} + (U^I)_{n-1}^{k-1}] / 2, \quad (53)$$

$$k = \overline{1, m-1},$$

$$U_i^0 = \phi(i \cdot h), \quad i = \overline{0, n}, \quad (54)$$

where δ and γ are positive parameters and $1 + \gamma = \delta$.

It should be noted that in the process of calculating of the approximate solution U by scheme (49) do not need the values of $(U^H)_0^k$ and $(U^H)_n^k$. However, for completeness, we assume that they are given, for example, by conditions (16) and (17').

Note that from the difference scheme (49), the boundary conditions (50) and additional boundary conditions (52) can be rewritten as

$$(U^I)_0^k = D^I \left\{ \delta S(U^H)_0^k - \gamma(U^I)_1^{k-1} + \frac{r\gamma}{2} R^I (U^I)_2^k + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2} \Delta R^I [-Q^I U_1^k + (F^I)_1^k] \right\}, \quad (50')$$

$$(U^H)_0^k = D^H \left\{ (U^H)_1^{k-1} + \frac{r}{2} R^H (U^H)_2^k + \right. \\ \left. + \Delta R^H [-Q^H U_1^k + (F^H)_1^k] \right\}, \quad (52')$$

where

$$R^I = (A^I)^{-1}, \quad R^H = (A^H)^{-1},$$

$$D^I = (I_{N_0} + \frac{\gamma}{2} r R^I)^{-1},$$

$$D^H = (I_{N_1} + \frac{1}{2} r R^H)^{-1},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q^I \\ Q^H \\ Q^H \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F^I \\ F^H \\ F^H \end{bmatrix},$$

Q^I, Q^H, Q^H are rectangular matrix of dimension $N_0 \times N, N_1 \times N, N_2 \times N$, and F^I, F^H, F^H are the vector functions of dimension N_0, N_1, N_2 , respectively.

Theorem 6.1. Let the parameters γ, δ, r satisfy the inequalities

$$\gamma < \delta \leq 2\gamma, \quad (\delta = 1 + \gamma, \quad 1 < \delta \leq 2) \\ r \leq \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(A) \quad (55)$$

Then the difference scheme (49) – (55) is stable in the energy norm $\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_k}$, where

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k = h \sum_{i=1}^{n-1} S_k + \Delta \{(B U_1^{k+1}, U_0^k) - (B U_{n-1}^{k+1}, U_n^k)\},$$

$$S_k = (A U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + r(U_i^{k+1}, B[U_{i+1}^k - U_{i-1}^k]).$$

Proof: Multiply (6.1) by a scalar vector $U_i^{k+1} + U_i^{k-1}$:

$$S_k + S_{k-1} = -r(B[U_{i+1}^k - U_{i-1}^k], U_i^{k-1}) - \\ - r(U_i^k, B[U_{i+1}^k - U_{i-1}^k]) - 2\Delta(Q U_i^k, U_i^{k+1} + U_i^{k-1}) + 2\Delta(F_i^k, U_i^{k+1} + U_i^{k-1}), \quad (56)$$

In deriving of (56) we have used the following relation

$$(A[U_i^{k+1} - U_i^{k-1}], [U_i^{k+1} + U_i^{k-1}]) = \\ = (A[U_i^{k+1}, U_i^{k+1}] - (A U_i^{k-1}, U_i^{k-1}))$$

Multiplying (56) by h and sum the resulting expression for i from 1 to $n-1$ gives

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k - \tilde{\mathfrak{J}}_{k-1} = \Delta(K + M_k), \quad (57)$$

where

$$K = K_1 + K_2,$$

$$K_1 = 2(B U_0^k, [U_1^{k+1} + U_1^{k-1}]),$$

$$K_2 = -2(B U_n^k, [U_{n-1}^{k+1} + U_{n-1}^{k-1}]),$$

$$M_k = 2h \sum_{i=1}^{n-1} (Q U_i^k + F_i^k, U_i^{k+1} + U_i^{k-1}).$$

In deriving (57) we have used the following relation

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \{(U_i^k, B[U_{i+1}^{k-1} + U_{i-1}^k]) + \\ + (U_i^{k-1}, B[U_{i+1}^k + U_{i-1}^k])\} = \\ = -(U_1^k, B U_0^{k-1}) - (U_0^k, B U_1^{k-1}) + \\ + (U_{n-1}^k, B U_n^{k-1}) - (U_n^k, B U_{n-1}^{k-1}).$$

Using the inequality

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k \geq h \sum_{i=1}^{n-1} (1 - rb)[(A U_i^k, U_i^k) + (A U_i^{k+1}, U_i^{k+1})],$$

we estimate the expression for M_k

$$M_k \leq h \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{2 \|Q\|^2}{\lambda_{\min}(A)} (A U_i^k, U_i^k) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\lambda_{\min}(A)} \{(A U_i^{k+1}, U_i^{k+1}) + (A U_i^{k-1}, U_i^{k-1})\} \right. \\ \left. + 2(F_i^k, F_i^k) \right] \leq \frac{2}{1-ra} \Phi + \\ + \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \frac{\|Q\|^2 + 2}{1-rb} (\tilde{\mathfrak{J}}_k + \tilde{\mathfrak{J}}_{k-1}),$$

where $\lambda_{\min}(A) = \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(A)$, $b = \frac{1}{\lambda_{\min}(A)}$, and Φ is given in Lemma 2.1.

Now we show that K , for the vector U satisfying the boundary conditions (50) – (53) is non-positive. Indeed

$$K_1 = ((U^I)_0^k, \omega^I) - ((U^H)_0^k, \omega^H) = \\ = (\delta S(U^H)_0^k, \frac{\gamma}{2} \omega^I, \omega^I) - ((U^H)_0^k, \omega^H) = \\ = (\frac{\delta}{2} S \omega^H, \omega^I) - \frac{\gamma}{2} (\omega^I, \omega^I) - \frac{1}{2} ((\omega^H, \omega^H)) \leq \quad (58) \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \delta S^* S - I_{N_1} \right) \omega^H, \omega^H \right\} + \\ + \left(\frac{1}{2} \delta - \gamma \right) (\omega^I, \omega^I) \leq 0,$$

where $\omega^{I,H} = (U^{I,H})_1^{k+1} + (U^{I,H})_1^{k-1}$. Note that in the derivation of the inequality (58) we have used the conditions (55) and

$$|(S \omega^H, \omega^H)| \leq (S^* S \omega^H, \omega^H)^{\frac{1}{2}} (\omega^I, \omega^I)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{1}{2} (\omega^I, \omega^I) + \frac{1}{2} (S^* S \omega^H, \omega^H), \\ \frac{1}{2} \delta S^* S - I_{N_1} \leq S^* S - I_{N_1}.$$

In a similay way, it can be proved that $K_2 \leq 0$. Consequently $K \leq 0$.

Exercise: Prove that for the vectors U , satisfying the boundary conditions (51) and (53), the inequality $K_2 \leq 0$ is hold, if α, β, r are subjected to conditions (55). Finally, we obtain the following energy inequality

$$\tilde{\mathfrak{J}}_k + \tilde{\mathfrak{J}}_{k-1} \leq \Delta [\mu_1 \tilde{\mathfrak{J}}_k + \mu_1 \tilde{\mathfrak{J}}_{k-1} + \mu_2 \Phi],$$

$$\text{where } \mu_2 = \frac{2}{1-ra}, \mu_1 = \mu_2 \frac{\|Q\|^2 + 2}{\lambda_{\min}(A)}.$$

Hence, we have (see Lemma 2.1)

$$\mathfrak{I}_k \leq C_0 \mathfrak{I}_0 + C_1 \Phi, \quad k = 1, \dots, m-1,$$

where $C_0 = e^{3T\mu_1}$, $C_1 = \frac{\mu_2(e^{3T\mu_1} - 1)}{2\mu_1}$. QED.

Note 6.1. Note that with the help of difference scheme (49) - (54) it is impossible to find the approximate solutions on the first layer with respect to time, i.e. value U_i^1 ; $i = 0, \dots, n$. To overcome this difficulty, one has to use for example the schemes (13) - (16), (17'), (44).

Computational Algorithm: Let the value of $\{U_i^k\}$ and $\{U_i^{k-1}\}$ with respect to a k -layer points are known. Substituting (50) and (52') into (49) gives the

values U_1^k, U_2^k , and hence the values of the vectors $(U^I)_0^k$ and $(U^{II})_0^k$ can be found. Similarly the values of the vectors $(U^I)_n^k$ and $(U^{II})_n^k$ are found by the formulas (51) and (53). Then, the values of the vectors U_i^{k+1} ; $i = 1, \dots, n$, for all internal points $k+1$ -layer are calculated from the formulas (49). The values of U_i^0 ; $i = 0, \dots, n$ are known and calculated according to the formula (54). In order to compute U_i^1 ; $i = 0, \dots, n$ we need to apply one of computational schemes described in the preceding paragraphs. Thereafter, using the values U_i^0 and U_i^1 we find U_i^k ; $k = 2, \dots, n$ successfully.

Example. (Listing)

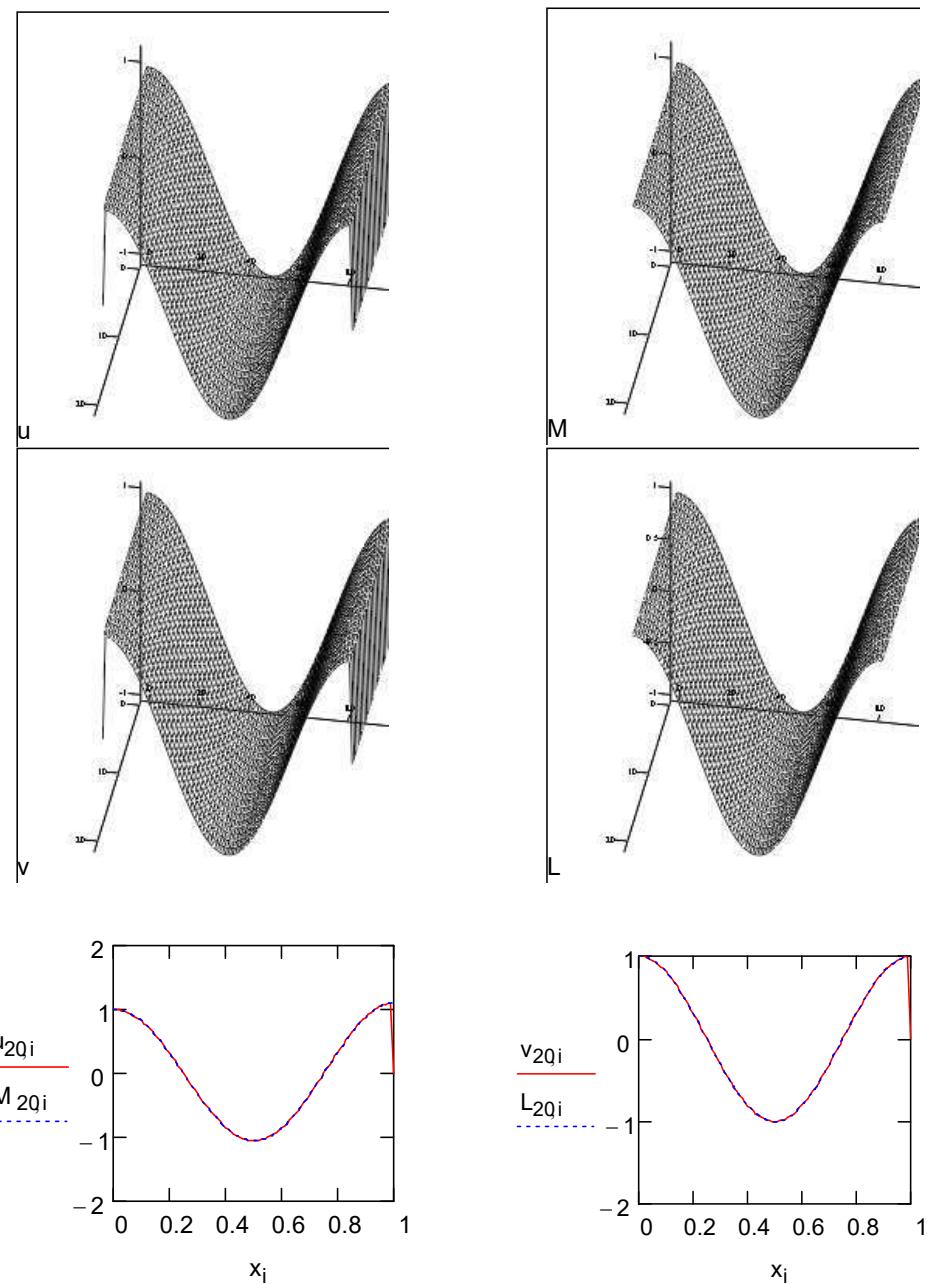


Fig. 6. Exact and approximate solution of examples of §2 for stable difference scheme

References

- [1] Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Dierenzengleichungen der mathematischen // Physik. Math. Annalen. 1928. – № 100. – Pp. 32-74.
- [2] Godunov S.K. Equations of mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1979.
- [3] Ladyzhenskaja O.A. Boundary value problems of mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1973.
- [4] Blokhin A.M. Energy integrals and their applications to problems of gas dynamics. – Novosibirsk: Science, 1986. – 240 p.
- [5] Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. Introduction to the theory of difference scheme. – Moscow: Fizmatgiz, 1962.
- [6] Shokin Y.I., Yanenko N.N. The method of differential approximation. Application to gas dynamics. – Novosibirsk: Science, 1985.
- [7] Zavjalov Y.C., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Methods of spline functions. – Moscow: Science, 1980. – 392 p.
- [8] Gourlay A.R., Mitchell A.R. Two-lewel differece schemes for hyperbolic systems // SIAM.J.Numer.Anal. – 1966. – Vol. 3. – № 3. – Pp. 474-485.
- [9] Blokhin A.M., Alaev R.D. Some of the problems of mathematical modeling. – Tashkent: TSU, 1992. – 112 p.
- [10] Blokhin A.M., Alaev R.D. Energy integrals and their application to the study of the stability of difference schemes. – Novosibrsk: UoN, 1993. – 224 p.
- [11] Alaev R.D., Eshkuvatoz Z.K., Davlatov Sh.O., Nik Long N.M.A. Sufficient condition of stability of finite element method for symmetric T-hyperbolic systems with constant coefficients // Computers and Mathematics with Applications. – 2014. – № 68. – Pp. 1194-1204.
- [12] Alaev R.D., Blokhin A.M., Hudayberganov M.U. One Class of Stable Difference Schemes for Hyperbolic System // American Journal of Numerical Analysis. – 2014. – № 2(3). – Pp. 85-89.

UDC 681.325.518.5

SIMULATION OF METHODS OF FUNCTIONAL DEPENDENCIES ON THE BASIS OF ONE-DIMENSIONAL SPLINES

Mirzaev A.E.

senior teacher, «Information technologies» department, Tashkent University of Information Technologies
tel: + (99871) 238-64-37, e-mail: mirzo.avazbek@mail.ru

Xalilov S.P.

assistant teacher, «Information technologies» department, Tashkent University of Information Technologies
tel: + (99871) 238-64-37, e-mail: suraj_24@mail.ru

The article considers the problem of constructing specialized computing devices based on uniform approximation of functions by splines. Also methods and computer-oriented algorithms, designed to implement a class of special functions are analyzed.

Keywords: Cubic spline, approximation, interpolation, signal, polynomial.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ СПЛАЙНОВ
Мирзаев А.Э., Халилов С.П.

Рассматривается проблема построения специализированных вычислительных устройств на основе равномерного приближения функций сплайнами. Анализирует методы и компьютерно-ориентированные алгоритмы, предназначенные для реализации класса специальных функций.

Ключевые слова: кубический сплайн, аппроксимация, интерполяция, сигнал, полиномиал.

BIR O'LCHOVLI SPLAYNLAR ASOSIDA FUNKSIONAL BOG'LIQLIK
METODLARINI MODELLASHTIRISH
Mirzayev A.E., Xalilov S.P.

Maqolada splayn funksiyalarning teng yaqinlashuvi asosida maxsus hisoblash qurilmalarni ishlab chiqish muammolari ko'rib chiqiladi. Bundan tashqari, maxsus funksiyalar sinflarining realizatsiyasi uchun mo'ljallangan metodlar va kompyuterlarga mo'ljallangan algoritmlar tahlil qilinadi.

Tayanch iboralar Kubik splayn, approksimatsiya, interpolatsiya, signal, polinomial.

1. Introduction

In the last years of development modern technologies in all of the world we see that issues of recomposing signal and working up of them, growing quantities of scientist technical works and they concerned to device based on huge integral schemed architect of their algorithm.

The modern methods of working up image and signals mainly are up to development algorism and structure devices, elements of counting devices and view of architect.

It is complicated and measurable in the many circumstances the information about various devices with sensor techniques with their signals, temperature, radiation, electromagnetism, gravitation, hotness and other situation of physic areas and measures.

Demands for high improvement of counting system which are used in these spheres will be satisfied by devices with big processor of parallel conveyers counting, as well as new methods of process of working up digital signals.

2. The purpose of the work

Currently, there are a number of studies on the properties of the spline - functions and their possibilities for technical applications. The wide popularity of spline - approximation due to the fact that they serve as a universal tool of modelling features and compared to other mathematical methods with equal with them information and hardware costs provide greater computational accuracy.

In general, the development of spline theory goes in two directions:

1) Spline interpolation system satisfying certain boundary conditions and conditions in the interior of areas.

2) Smoothing splines when considering how to optimize various kinds of functional.

3. Function module

Any spline sufficient smoothness can be represented in terms of basic splines. In particular, when $d = 1$ for the decomposition, so-called «normalized» basis splines degree m (B -splines). They are local (finite), piecewise-polynomial functions and satisfy the following conditions

- 1) $B_m(x) \equiv 0$ at $x \notin (X_i, X_{i+m+1})$;
- 2) $B_m(x) > 0$ at $x \in (X_i, X_{i+m+1})$;

$$\int_a^b B_m(r) dr = \int_{x_i}^{X_{i+m+1}} B_m(r) dr = 1.$$

Their Fourier transform as a finite functions determined by the formula

$$F_m(w) = \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2} \right)^{m+1}.$$

They can also be defined as the convolution operation results in - splines lower grades

$$B_m(x) = B_{m-i}(x) \cdot B_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{m-1}(x) B_0(x-r) dr,$$

where $B_0(r)$ - rectangular pulses (rect-function).

To provide approximation for the entire interval $[a,b]$ B -splines to be set to a wider region by introducing additional nodes $2m i = -m, m + 1, \dots, n + m$ being, all the nodes may be irregularly

For calculation of normalized B -splines arbitrary degree m can apply the recursive formula [1-5]:

$$B_{m,i} = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} \cdot B_i^{m-1}(x), & x \in \left[x_{\frac{i-m+1}{2}}, x_{\frac{i+m-1}{2}} \right] \\ \frac{x_{i+m+1} - x_i}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} \cdot B_{i+1}^{m-1}(x), & x \in \left[x_{\frac{i-m-1}{2}}, x_{\frac{i+1+m+1}{2}} \right] \end{cases}$$

The simplest analytical expression for B -splines are obtained for the case of uniform grids task. Here are the basic elements of expression for some degrees.

For the first degree of B -splines

$$B_{0,1}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{at } x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & \\ 0 & \text{at } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

1) For the second degree of B splines

$$B_{0,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 3/2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 & 1/2 \leq x < 3/2, \\ \frac{3}{4} - x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ B_{0,2}^0(-x) & x < 0. \end{cases}$$

Nodes B -splines of the second degree are located in the points $i - 1/2, (i = -2, -1, 0, \dots, n)$. Selecting nodes between nodes in the middle due to the requirements of the uniqueness of interpolation approximation.

Methodical error of approximation of parabolic splines defined by the inequality:

$$\varepsilon \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \max |f'''(x)| h^3.$$

Charts B - splines of zero, first and second degree for the case of a uniform grid are shown in Fig. 1. Charts B -splines of degree zero coincide with the schedules renowned rect-functions.

One of the important properties of B -splines is the continuity of several of its derivatives. For example, the first and second derivatives of a parabolic base B -spline:

1) in the interval $-1,5 \leq x < -0,5$

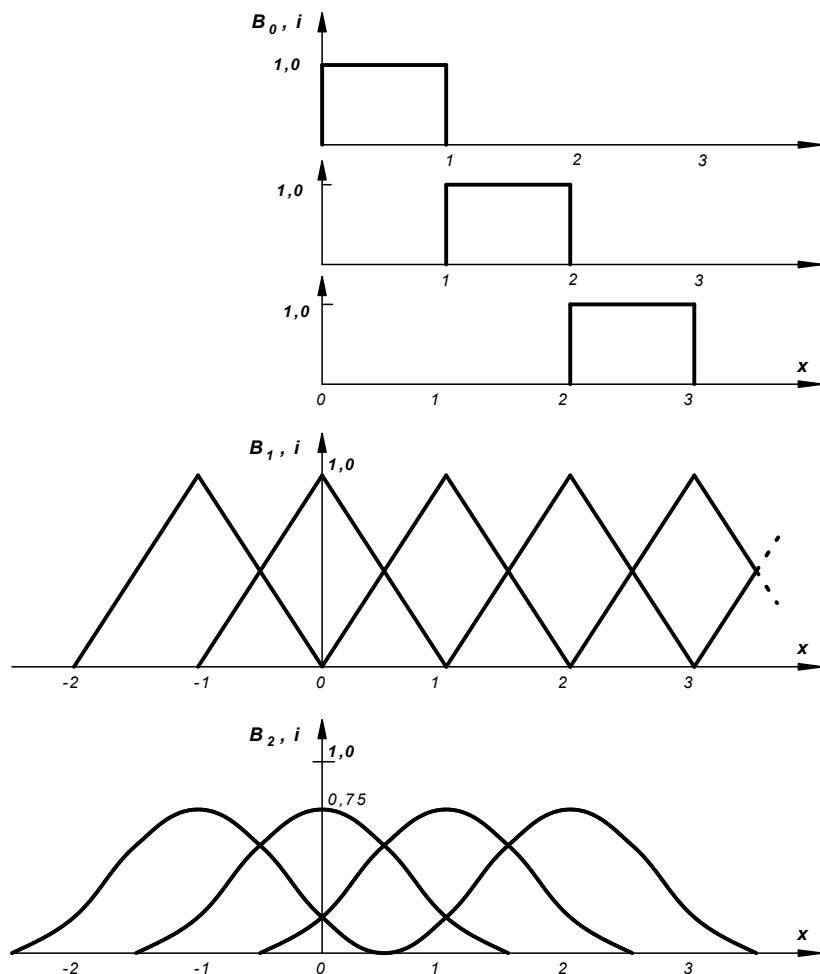
$$B_{0,2}(x) = \frac{1}{2} (1,5 - x)^2 = 0,5 (2,25 + 3x + x^2);$$

$$B_{0,2}'(x) = 0,5 (2x + 3) = 1,5 + x;$$

$$B_{0,2}''(x) = 1;$$

2) in the interval $-0,5 \leq x < 0,5$

$$B_{0,2}(x) = \frac{3}{4} - x^2; B_{0,2}'(x) = -2x; B_{0,2}''(x) = -2.$$



Parabolic B-splines zero, first and second degrees

4. Conclusion

An analysis of the spline approximation methods revealed that the vast majority of the elementary functions used in practice can be successfully approximated basic splines. The mathematical apparatus of approximation basic splines allows us to represent the functional dependencies in the form of sums of pairwise products of constant coefficients on the values of basis

functions. It provides a basis for significant parallelism both analytically and table-set of functional dependencies. Local property basis spline defines a limited number of ($N + 1$, wherein the N -degree spline) terms in the approximate amounts and minimum volume tables of basis functions. The combination of basic splines and table-algorithmic methods of implementation of processor means possible to obtain parallel computing structures.

References

- [1] Зайниддинов X.Н., Хамдамов Ў.Р., Мирзаев А.Э. Piecewise basic methods of processing of aggregate signals on the basis of many-dimensional basic splines // The Second International Conference In Central Asia on Internet The Next Generation of Mobile, Wireless and Optical Communication Networks (ICI 2006), September 19-21, 2006. – Tashkent, 2006. – IEEE Catalog Number: 06EX1492C with: ISBN: 1-4244-0543-2.
- [2] Мирзаев А.Э., Халилов С.П. Analysis and modeling specialized processor for digital signal processing on the piecewise-polynomial bases // Perspectives for the development of information technologies ITPA 2014: transactions of the international scientific conference, November 4-5, 2014. – Tashkent, 2014. – Pp. 189-193.
- [3] Hakimjon Z., Kim S.S., Mirzaev A. Piecewise-Polynomial Bases for Digital Signal Processing // International Journal of Ubiquitous Computing and Internationalization. – 2011. – Vol. 3. – № 1. – Pp. 59-65.
- [4] Mirzaev A.E., Mirvorisov J.B. Funksiyalarni yaqinlashtirish masalasi modellari // TATU xabarlar jurnali. – Toshkent, 2011. – № 3. – B. 58-60.
- [5] Mirzaev A.E., Xalilov S.P. Signallarni qayta tiklashdagi interpolyatsiya masalasi va interpolyatsion kubik splaynning ahamiyati // TATU xabarlar jurnali. – Toshkent, 2011. – № 1. – B. 20-25.

УДК 687.053(072)

ПОТЕНЦИАЛ АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рустамов Н.Т.

д.т.н., Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А. Ясави
e-mail: nasim52@mail.ru

Порсаев Г.М.

к.т.н., доцент,
Самаркандинский государственный университет им. А. Навои
тел.: +(99866) 239-04-17, e-mail: porsaev@rambler.ru

Рассматривается вопрос, связанный с определением условия оценки устойчивости существования организационных структур, представленных как активная система. При этом дается определение потенциала организации. А процесс планирования представляется как построение параллелепипеда с ортогональной гранью, представляющего соответствующие компоненты потенциала организации. С помощью алгоритма формирования сообщения о выполнении заданного плана элементами активной системы показано влияние такого сообщения на устойчивость управления. Показаны возможность оценки эффективности управления при активизации потенциала управления системой с оцениванием манипулируемости сообщений о выполнении плана элементами этой системы и роль процедуры административного контроля в такой оценке.

Ключевые слова: устойчивость активной системы, пассивная система, ортогональная грань, процедура административного контроля, устойчивое управление, элементы активной системы, потенциал организации.

CAPACITY OF ACTIVE SYSTEM
AND ITS STABILITY
Rustamov N.T., Porsaev G.M.

The paper deals with the issue related to the definition of the condition assessment of the stability of the existence of organizational structures, presented as an active system. This defines the capacity of the organization. A planning process is presented as a building of the box with an orthogonal edge represents the relevant parts of the building. With the formation of the algorithm implementation reports specified plan, the active elements of the system, shows the effect of the message on the control stability. It is shown the possibility of assessing management effectiveness when activating the system management capabilities, assessing manipulability reports on implementation of the plan elements of the system and the role of the administrative control procedures for such valuation.

Keywords: active stability of the system, a passive system that is orthogonal to the brink, the procedure of administrative control, robust control, active elements of the system, the potential of the organization.

FAOL TIZIMNI POTENSIALI
VA UNI TURG'UNLIGI
Rustamov N.T., Porsayev G.M.

Ushbu maqolada faol tizimning tashkiliy tuzilmasi tahlil qilinadi va uning turg'unlik bo'lish sharti aniqlanadi va baholanadi. Shu bilan birga tashkilotning potensiali aniqlanadi. Bunda rejalshtirish jarayoni bevosita to'g'ri parallelepipedni yaratish bilan bog'lik bo'lib, uning yog'lari esa tashkilotni potensialining qismlarini tashkil etadi. Berilgan rejani bajarilishi xabarlarni shakllantirish algorit'm orqali amalga oshiriladi va ushbu xabarlarni boshqaruvni turg'unliligiga ta'siri baholanadi. Tizimni boshqarish potensialini faollashtirish orqali va tizim elementlari tomonidan rejani boshqarish maqsadida xabarlarni o'zgartirishni baholash va tizimni ma'muriy nazorat qilish jarayonining ahamiyati bevosita boshqaruv samaradorligini baholash imkoniyati berilgan.

Tayanch iboralar: farl tizimning turg'unligi, passiv tizim, ortogonal yon, ma'muriy nazorat jarayoni, boshqaruv turg'unligi, faol tizim elementlari, tashkiliy potensiali.

1. Введение

В конце 60-х годов XX века, на фоне бурного развития кибернетики, начались исследования операций математической теории управления (теория автоматического регулирования - ТАР) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем практически одновременно во многих научных центрах как в Республике Казахстан, так и за рубежом, а также предпринимались попытки применения общих подходов теории управления для разработки социальных и экономических систем (*теория активных систем – ТАС [1-3], теория игрархических игр – ТИИ [4, 5], Mechanism Design – MD [6, 7]*). На сегодняшний день можно констатировать о полном слиянии этих научных направлений и появлении нового синтетического направления – *теории управления организационными системами*.

Для построения эффективных механизмов управления необходимо иметь модель управляемой системы для того, чтобы исследовать ее реакции на те или иные управляющие воздействия. Элементами организационной системы являются персонал организации, их группы, коллективы и т.д. Персонал организации отличается способностью самостоятельно принимать решения, поэтому в первую очередь следует оценивать степень их управляемости.

В свою очередь такая оценка связана с определением реакции элементов организации на управляющие воздействия. В ТАС, ТИИ и МД изначально предполагается, что модели управления задаются. На практике эти модели строятся на интуициях руководителя организации [8].

Основной целью данной работы является определение условий оценки устойчивости существования организационных структур при активизации потенциала управления системы.

2. Основные понятия и определения

Известно [1], что под организацией (организационной системой) понимается объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил. Этую систему определим как *активная - A_c* , а людей, работающих в этой системе, как *активные элементы - A_s* .

Рассмотрим общую классическую формулировку задачи управления некоторой (пассивной или активной) системой. Пусть состояние системы описывается переменной $y \in A$, принадлежащей допустимому множеству A . Состояние системы в рассматриваемый момент времени зависит от управляющих воздействий $\eta \in U: y = G(\eta)$ [7].

Для пассивной системы (например, технической) зависимость $y = G(\eta)$ является моделью системы – управляемого объекта, отражающего регламент его функционирования.

Иначе обстоит дело в активных системах A_c , управляемые субъекты которых обладают свойством активности, в том числе – свободного выбора своего состояния. Помимо возможности выбора состояния, элементы активной системы A_c обладают собственными интересами и предпочтениями, осуществляют выбор состояния целенаправленно (иначе их поведение можно рассматривать как пассивное). В этом случае зависимость $y = G(\eta)$ определяется реакцией на управляющие воздействия A_s .

В данной работе предлагается аналитический вид такой модели, а также необходимость оценки связи процедуры административного контроля, обеспечивающей устойчивость работы модели.

Стабильное существование любой организационной структуры (активной системы A_c), во многом зависит от ее потенциала $\Pi_o^{A_c}$ и от использования этого потенциала, состоящего из трех компонент: внешнего потенциала $\Pi_{\text{вн}}^{A_c}$; внутреннего потенциала $\Pi_{\text{вн}}^{A_c}$; потенциала управления $\Pi_y^{A_c}$, т.е.

$$\Pi_o^{A_c} = \Pi_{\text{вн}}^{A_c} \& \Pi_{\text{вн}}^{A_c} \& \Pi_y^{A_c} .$$

Предположим, что на множестве $U \times A$ задан функционал $\Phi(\eta, G(\eta), \Pi_o^{A_c})$, определяющий эффективность функционирования системы (с точки зрения управляющего органа). Величина $K(\eta, \Pi_o^{A_c}) = \Phi(\eta, G(\eta), \Pi_o^{A_c})$ называется эффективностью системы $\eta \in U$. Здесь $\Pi_o^{A_c} : \Pi_{\text{вн}}^{A_c} \& \Pi_{\text{вн}}^{A_c} \& \Pi_y^{A_c}$

выражает потенциал активной системы, на основе которого осуществляется процедура планирования X деятельности A_c . При такой постановке задача оценки эффективности управления A_c с учетом использования компонентов $\Pi_o^{A_c}$ в определенной пропорции приобретает актуальный характер.

3. Постановка задачи

Основная задача заключается в определении такого допустимого управления при определенных соотношениях компонентов потенциала $\Pi_o^{A_c}$ активной системы, которая максимизировала бы эффективность управления, обеспечивающей устойчивость A_c при условии, что известна реакция $G(\eta)$ элементов системы на управляющие воздействия, т.е.

$$\begin{aligned} \eta^* \in \operatorname{Argmax} K(\eta, \Pi_o^{A_c}) &= \{\eta \in U \mid \forall v \in U \\ K(\eta, \Pi_o^{A_c}) &\geq K(v, \Pi_o^{A_c})\}, \end{aligned} \quad (1)$$

и показывает при этом роли административного контроля.

4. Методы решения

Допустим, что компоненты потенциала A_c пространственно взаимосвязаны между собой, как на рис.1 а. Здесь наблюдается интересный факт. Если при построении параллелепипеда (рис.1 а) сохранить

ортогональность его четырехугольной грани (в принципе, параллелепипед строится с центром до начала деятельности A_c , т.е. в процедуре планирования, значит процедура планирования – это есть построение параллелепипеда), то после начала деятельности A_c выглядит как пирамида Хеопса (рис. 1 б). В этом случае $K(\eta, \Pi_o^{A_c}) = S_{\Delta ABC}$. После начала деятельности A_c , параллелепипед (рис. 1 а) превращается в пирамиду (рис. 1 б). При таком допущении пирамида, показанная на рис. 1 б, будет устойчивой. Исходя из этих соображений, выведем условие устойчивости активных систем. По предлагаемой концепции пирамида ассоциируется как деятельность A_c . Такая концепция дает возможность определить, в каких пропорциях использовать компоненты потенциала $\Pi_o^{A_c}$ активной системы, обеспечивающей эффективность управления A_c .

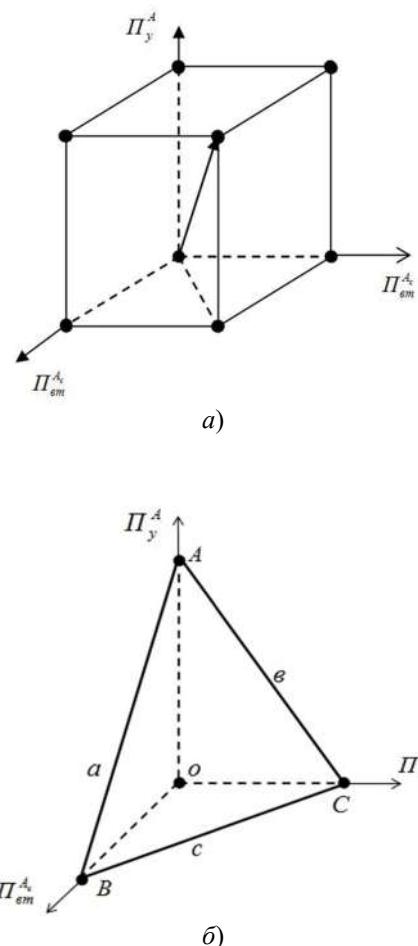


Рис.1. Пространственный вид $\Pi_o^{A_c}$ до начала деятельности A_c , - а, и после - б

Понятно, что после начала деятельности A_c центр будет использовать компоненты $\Pi_o^{A_c}$ по разным соотношениям в зависимости от типа $y = G(\eta)$. Поэтому деятельность A_c выглядит, как на рис.1б.

Чтобы A_c работала эффективно, пирамида должна быть устойчивой. Пирамида будет устойчивой, если $S_{\Delta ABC} = \xi \cdot (OA)^2$, т.е. должен соблюдаться принцип «золотого сечения». При таком подходе мы можем оценить соотношения между компонентами $\Pi_o^{A_c}$, являющимися основой процедуры планирования X , обеспечивающей устойчивость деятельности A_c .

При заданной цели Ψ_{A_c} центр строит параллелепипед активной системы (рис. 1 а). А в процедуре планирования X центр определяет ориентацию деятельности системы, обеспечивающей эффективность управления A_c . Такая ориентация определяется процедурой планирования. В этом случае имеется три варианта:

- ориентированный на $\Pi_{bh}^{A_c}$;
- ориентированный на $\Pi_{em}^{A_c}$;
- ориентированный на $\Pi_y^{A_c}$.

Эти варианты, определяющие центр A_c , будут использовать компоненты $\Pi_o^{A_c}$ в процессе деятельности A_c . В этом и заключается смысл стратегического планирования [9,10].

Если деятельность организации ориентирована на потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$ (рис. 2 а), это говорит о том, что у организации ограничен $\Pi_o^{A_c}$. Если деятельность организации ориентирована на внутренний потенциал $\Pi_{em}^{A_c}$ (рис. 2 б), то говорят, что у организации большой запас кадровых и технологических разработок. Наконец, если деятельность организации ориентирована на внешний потенциал, можно говорить о том, что организация работает благодаря ресурсному запасу (рис. 2 в).

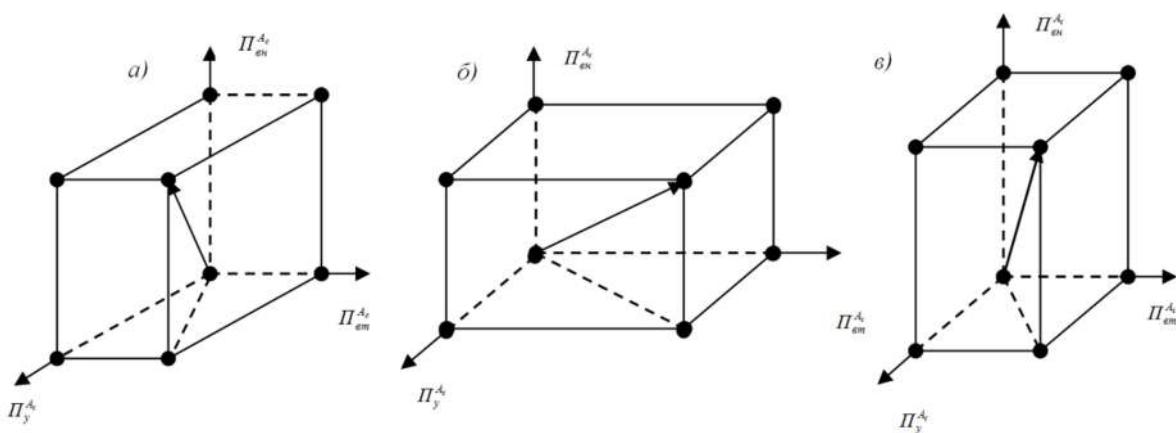
Для достижения поставленной цели центр A_c после планирования деятельности системы будет активизировать $\Pi_y^{A_c}$ [11]:

$$\xi : ((\Pi_{bh}^{A_c} \cap \Pi_{em}^{A_c}) \rightarrow \Pi_y^{A_c}) \rightarrow X, \quad (2)$$

а процедура активизации и будет выбором модели управления $G(\eta)$. С такой технологией управления центр может сохранить деятельность A_c как целую систему в условиях ограниченности ресурсов. С другой стороны, эффективность такой активизации связана с процедурой административного контроля A_k [12, 13].

Теперь, рассмотрим случай, когда деятельность A_c ориентирована на потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$.

Выведем условие устойчивости. Для этого случая и оценим соотношения между компонентами $\Pi_o^{A_c}$. В этом случае деятельность A_c выглядит как пирамида, показанная на рис.1 б, и выражается площадью $S_{\Delta ABC}$.

Рис.2. Ориентация потенциала активной системы A_c [9]

ТЕОРЕМА 1. Деятельность активной системы A_c будет устойчивой, если будет выполнено следующее условие:

$$S_{\Delta ABC} = \chi \cdot (OA)^2, \quad (3)$$

где χ - числовой коэффициент.

Доказательство. Пирамида будет устойчивой, если подчиняется принципу золотого сечения, т.е. площадь грани пирамиды должна равняться квадрату вершины пирамиды. Вычислим $S_{\Delta ABC}$:

$$\begin{aligned} a &= (AB) = \sqrt{(OB)^2 + (OA)^2}, \\ b &= (AC) = \sqrt{(OC)^2 + (OA)^2}, \\ c &= (BC) = \sqrt{(OC)^2 + (OB)^2}. \end{aligned}$$

На основе формулы Герона площадь треугольника ABC следующая:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Так как стороны параллелепипеда ортогональны, т.е. $OB = 1,6 OC$, тогда $OC = \frac{1}{1,6} OB = 0,6OB$.

Далее

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(0,6)^2(OB)^2 + (OA)^2}, \\ AB &= \sqrt{(OB)^2 + (OA)^2}. \end{aligned}$$

Если стороны параллелепипеда будут ортогональны четырехугольникам, т.е. $OA = 1,6(OB)$, то

$$BC = 1,16 \cdot 0,6(OA) \approx 0,7OA,$$

$$AC = \sqrt{(0,6)^2(OA)^2 + (OA)^2} \approx OA,$$

$$AB = \sqrt{(0,6)^2(OA)^2 + (OA)^2} \approx OA,$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot 2,7(OA) = 1,3(OA),$$

$s =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1,3(OA)(1,3(OA)-(OA)) \times} \\ &\quad \times (1,3(OA)-0,7(OA)1,3(OA)-(OA)) \\ &= \sqrt{0,2(OA)^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Результатом теоремы будет определение соотношения для потенциалов управления $\Pi_y^{A_c}$, внутреннего потенциала $\Pi_{bm}^{A_c}$ и внешнего потенциала $\Pi_{bh}^{A_c}$:

$$(\Pi_y^{A_c})^2 \approx 1,5(\Pi_{bm}^{A_c})^2 + 0,5(\Pi_{bh}^{A_c})^2. \quad (4)$$

Такое соотношение можно вывести для остальных ориентаций деятельности A_c .

Формула (4) показывает, чтобы деятельность A_c была устойчивой, её внутренний потенциал A_c надо использовать на три раза больше, чем внешний потенциал.

Если центр A_c , имеющий потенциал $\Pi_o^{A_c} = \Pi_{bm}^{A_c} \& \Pi_{bh}^{A_c} \& \Pi_y^{A_c}$, будет при активизации $\Pi_y^{A_c}$ использовать свои потенциалы по условию (3) и соблюдать соотношение (4), тогда деятельность A_c будет устойчивой. Из условия (4) видно, что эффективность управления зависит от использования внутренних и внешних потенциалов в определенной пропорции.

Условие (4) обеспечивает эффективность управления A_c , т.е. выполняется условие (1). Практические исследования показали правильность этого утверждения [9].

Теперь рассмотрим, как влияет процедура административного контроля на эффективность управления A_c .

В принципе процедура активизации $\Pi_y^{A_c}$ будет управлением активной системой A_c с учетом потенциала самой системы. Только такой технологией управления можно обеспечить устойчивость деятельности A_c как целую систему в условиях ограниченности ресурсов. С другой стороны, эффективность такой активизации $\Pi_y^{A_c}$ связана с процедурой административного контроля A_c [12].

Сам потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$ кроется в инструментах управляющих воздействий - умственного (a_1), исполнительного (a_2) и наблюдательного (a_3) (рис. 3).

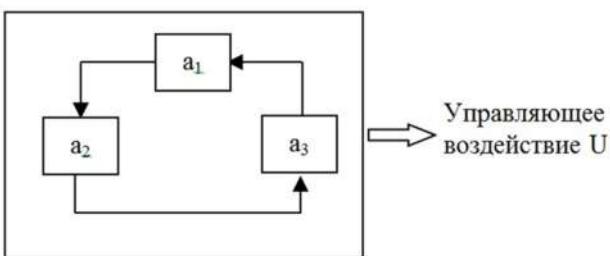


Рис.3. Формирование управляющего воздействия A_c [12]

Здесь a_1 - умственная составляющая, которая анализирует и оценивает управляемость A_c ; a_2 - наблюдательная составляющая, которая контролирует выполнение плана $X(\hat{S}, \Psi_{A_c})$ и управляемость A_c активных элементов; a_3 - исполнительная составляющая, которая осуществляет выполнение плана A_c -м.

Потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$ активной системы A_c зависит от взаимосвязи a_1 , a_2 , a_3 . Каждому инструменту управляющего воздействия соответствует определенная технология активизации $\Pi_y^{A_c}$ (a_1 , a_2 , a_3), именно активизация, a_1 – квалифицированность, a_2 – организованность, a_3 – информированность. В принципе такое распределение носит условный характер, так как любой акт управляющего воздействия выступает как момент единства взаимодействия всех трех инструментов, а значит, и момент единства организованности, информированности и квалифицированности управления. Степень единства трех инструментов и выражает потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$ активной системы A_c .

Соответственно конкретизируется и модель системы управления $G(\eta)$, которая должна учитывать проявления активности управляемых субъектов A_s . Управляющие воздействия (или процедура активизации потенциала управления $\Pi_y^{A_c}$) $\eta \in U$ по своей физической природе имеет две компоненты: силу и глубину. От этих компонент воздействия и зависит выбор типа управления.

Сила воздействия F – воздействие, влияющее на состояние объекта управления. Это может быть информационный сигнал, стимул, власть, авторитет, приказ, инструкция и.т.д.

Глубина воздействия Q – степень влияния воздействия на объект управления. Сочетание силы и глубины воздействия определяет тип управления. Управление – это воздействие, имеющее вид $U = F \& Q$. Естественно, на это воздействие обязательно будет реакция управляемого элемента A_s .

Реакции A_s на управляющие воздействия в нашем случае разделим на четыре группы:

S – сопротивляемость A_s на управляющие воздействия. Сопротивляемость выражается в удалении нежелания выполнить заданный план;

I – избирательность A_s на управляющие воздействия. Она выражается в избирательности (предпочтительности) выполнения плана;

N – неопределенность A_s на управляющие воздействия. Она выражается в неопределенности или в безразличии выполнения плана;

AI – активность A_s . Она выражается в большом желании выполнить заданный план.

$\hat{L} = \{S, I, N, AI\}$ – фактически не только определяет $u \in A$ активной системы, но позволяет руководителю организации оценить потенциал организации и составить стратегический план A_c . Таким образом, центр A_c , активизируя потенциал управления $\Pi_y^{A_c}$ системы

$$\xi : ((\Pi_{\text{би}}^{A_c} \cap \Pi_{\text{ем}}^{A_c}) \rightarrow \Pi_y^{A_c}) \rightarrow X,$$

производит управляющие воздействия на A_s [12]:

$$G(\eta) = (\eta \rightarrow S) \& (\eta \rightarrow I) \& (\eta \rightarrow N) \& (\eta \rightarrow AI). \quad (5)$$

Цель центра обозначим как $\Psi_{A_c}(X, \Omega)$ [7], где $X(\Pi_o^{A_c})$ – план, который должен выполнить A_c , Ω – множество типов A_s , в принципе, Ω означает $\Pi_{\text{ем}}^{A_c}$ активной системы A_c . Естественно, у центра A_c существует цель $\Psi_{A_c}(X, \Omega)$ в виде планов $X(\Pi_o^{A_c})$ и совокупность активных элементов A_s , выполняющих эти планы. Точно также существует цель активного элемента A_s – $\Psi_{A_c}(x_i, y_i, r_i)$, где $x_i \in X(\Pi_o^{A_c})$, $y_i \in A$, $r_i \in \Omega$. Из-за разницы (не совпадения цели)

$$\Psi_{A_c}(X, \Omega) - \Psi_{A_c}(x_i, y_i, r_i)$$

появляется необходимость в процедуре административного контроля A_k за выполнением X активными элементами A_c . Здесь $X(\Pi_o^{A_c})$ – совокупность планов A_c , которые необходимо выполнять; A – совокупность состояний A_c после воздействий U .

В много элементных A_c план, называемый i -му A_s , обозначим через $x_i \in X(\Pi_o^{A_c})$, $X(\Pi_o^{A_c})$ – множество допустимых планов, сообщение о выполнении плана i -го A_s , будем обозначать $s_i \in \hat{S}$, $i \in I$. Выполнение плана x_i A_s -м в общем случае выявляется на основе сообщения s_i . Такое сообщение собирается с помощью процедуры административного контроля A_k [14].

Будем считать, что центр определяет планы по процедуре планирования $\pi: \hat{S} \rightarrow X$, где $\hat{S} = \prod_{i \in I} s_i$, $X = \prod_{i \in I} x_i$, и план, называемый i -му A_s , будет определяться выражением $x_i = \pi(\hat{S})$, $i \in I$; $s_i \in \hat{S}$.

Для того чтобы определить условие для процедуры A_k , обеспечивающей устойчивость управления (2), проанализируем процедуру планирования.

План X состоит из $\{a_{ij}(x_j)\}$ частей, где $x_j \in X$ – содержания плана, a_i – i -ая часть этого плана. С другой стороны, X должен выполняться к заданному сроку $t = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$. Часть плана, выполняемую к заданному сроку, выразим как $a_{11}^{tl}(x_1) \in x_j - a$, часть плана X , выполняемую за время t_1 – активным элементом A_s . Таким образом, центром A_c задается множество планов, элементы активной системы A_c которые должны выполняться в заданное время t :

$$X = \{a_{11}^{tl}(X_1), a_{22}^{t2}(X_2), \dots, a_n^{tn}(x_n^n)\};$$

здесь $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

После этого руководители структуры A_c распределяют по A_s – там эти планы. При этом руководители структуры A_c должны четко сформулировать содержания планов x_1, x_2, \dots, x_n , которые активные элементы A_s должны выполнять в заданный срок следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1^{tl} &= b_1 \quad t_1 \text{ время } t_1 = t_1^1 + t_1^2 + \dots + t_1^e; \\ x_2^{t2} &= b_2 \quad t_2 \text{ время } t_2 = t_2^1 + t_2^2 + \dots + t_2^{ec}; \\ \dots & \\ t_k &= t_k^1 + t_k^2 + \dots + t_k^k x_k^{tk} = b_k t_k \text{ время}. \end{aligned}$$

Здесь b_k – содержание плана x_k , $x_k \in X$; $t = t_1 + t_2 + \dots + t_k$ – общее время для выполнения работы $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. С другой стороны, $b_k \in B$ – работа, являющаяся содержанием плана X , делится на части $b_1 = b_1^1 + b_1^2 + b_1^3 + \dots + b_1^n$ и требует определенного промежутка времени t_k для выполнения этих частей работы b_k . Таким образом, план X будет функцией B и t , т.е. $X(B, t)$.

Это равенство выражает формирование сообщений \hat{S} , передаваемых центру A_c через A_k . Именно, функцией процедуры административного контроля A_k выявляется недопущение искажения этого сообщения.

Исходя из изложенных выше соображений, процедуру планирования $\pi: \hat{S} \rightarrow X$ можно представить в виде таблицы.

Эта таблица выражает баланс выполнения плана X активными элементами A_s организации в заданное время. А условие выполнения плана выражается следующей процедурой.

Активный элемент A_s будет выполнять план x_j , который отражается на сообщении s_j^r , $X(B, t)$ на сообщении \hat{S} . Сообщение о том, что элемент A_s выполнил план x_i , и будет отражаться на сообщении s_j^r . Результирующим сообщением \hat{S} о выполнении плана X будет

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^n (s_i^r + s_i^r). \quad (6)$$

Это равенство выражает формирование сообщений \hat{S} , передаваемых центру A_c через A_k .

Формула (6) выражает баланс выполнения плана X активными элементами A_s организации в заданное

время. А условие выполнения плана выражается процедурой

$$X: \sum_{c=1}^n (\sum_{e=1}^k b_e)_c \rightarrow \hat{S}. \quad (7)$$

Процедура активизации потенциала $\Pi_y^{A_c}$ активной системы:

$$\xi: ((\Pi_{\text{бн}}^{A_c} \cap \Pi_{\text{бт}}^{A_c}) \rightarrow \Pi_y^{A_c}) \rightarrow X$$

будет обеспечивать устойчивость деятельности A_c , если выполняется условие (7). Эта процедура показывает, что результаты процедуры A_k определяют эффективность управления A_c , оценивая степень искажения сообщений \hat{S} .

Условие (7) показывает, что результаты процедуры A_k определяют устойчивость существования активной системы при выполнении условий (4).

Сказанное можно выразить следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть X – план, который A_c должен выполнить, и Y – выполненная часть этого плана. Тогда процедура выполнения этого плана выглядит как $\hat{S}: Y \rightarrow X$ при выполнении условия (4).

Доказательство. Чтобы скорректировать план X , центру A_c нужно не искаженное сообщение \hat{S} . Если \hat{S} будет искажаться, то корректировка плана будет не обоснованной. Если сообщение искажается, то из табл. 1 видно, что баланс выполнения плана нарушается, т.е. $\hat{S} < 1$. Если сообщение о выполнении плана не будет искажаться, то баланс выполнения плана не нарушается, т.е. $\hat{S} = 1$. На основе (5) $G(\eta) = 1$. Из этого следует

$$\begin{aligned} \eta^* \in \text{Argmax } K(\eta, \Pi_o^{A_c}) = \\ = \{\eta \in U \mid \forall v \in U K(\eta, \Pi_o^{A_c}) \geq K(v, \Pi_o^{A_c})\}. \end{aligned}$$

Тем самым видно, что результаты работы процедуры A_k прямо влияют на устойчивость управления организацией.

Таким образом, $\text{Argmax } K(\eta)$, если выполняется условие (6). Процедура A_k (4) определяет, выполняется ли условие (6).

Из этого выходит, что содержание сообщений \hat{S} является результатом работы процедуры A_k , т.е. процедура A_k сообщает центру организации о неискаженности сообщений \hat{S} . Тем самым центр узнает о выполнении условия (6) и принимает управленческие решения.

5. Вычислительный эксперимент

Теперь численно оценим все компоненты потенциала $\Pi_o^{A_c} = \Pi_{\text{бн}}^{A_c} \& \Pi_{\text{бт}}^{A_c} \& \Pi_y^{A_c}$ активной системы. Внутренний потенциал активной системы $\Pi_{\text{бн}}^{A_c}$ оценивается с помощью SWOT- анализа [15], внешний потенциал активной системы $\Pi_{\text{бт}}^{A_c}$ – с помощью VRIO- анализа [16], потенциал управления активной системы – с помощью алгоритма «АПУ-анализ» [9].

| A_c | X_i^n | b | b^1 | b^2 | b^3 | ... | b^* | $\sum_{i=1}^n b_i^i$ | \hat{S} |
|-----------|--------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----|-----------------------------|--|-----------|
| A_{c1} | x_1^i | $b_1(t_1)$ | $b_1^1(t_1^1)$ | $b_1^2(t_1^2)$ | $b_1^3(t_1^3)$ | ... | $b_1^*(t_1^*)$ | $\sum_{i=1}^n b_1^i$ | s_1 |
| A_{c2} | x_2^i | $b_2(t_1)$ | $b_2^1(t_1^1)$ | $b_2^2(t_1^2)$ | $b_2^3(t_1^3)$ | ... | $b_2^*(t_1^*)$ | $\sum_{i=1}^n b_2^i$ | s_2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| A_{ck} | x_k^i | $b_k(t_1)$ | $b_k^1(t_1^1)$ | $b_k^2(t_1^2)$ | $b_k^3(t_1^3)$ | ... | $b_k^*(t_1^*)$ | $\sum_{i=1}^n b_k^i$ | s_k |
| A_c | $\sum_{i=1}^k x_i$ | $\sum_{i=1}^k b_i(t_1)$ | $\sum_{i=1}^k b_i^1(t_1^1)$ | $\sum_{i=1}^k b_i^2(t_1^2)$ | $\sum_{i=1}^k b_i^3(t_1^3)$ | ... | $\sum_{i=1}^k b_i^*(t_1^*)$ | $X = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k b_i^j(t_1^i) \right)_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k b_j^i \right)_i$ | |
| \hat{S} | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 | ... | S_k | $\hat{S} = \sum_{i=1}^n (S_i) = \sum_{i=1}^n (S_i^-)$ | |

Матрица активизации потенциала управления

Формирование управляющих воздействий в АС

Введите значение внешнего потенциала

Введите значение внутреннего потенциала

Внешний потенциал АС

Пуск

Внешний потенциал АС

Потенциал управления АС

Внутренний потенциал АС

Смысъ ячеек:

| |
|------------------------------|
| 1'' - a1>max |
| 2'' - a2>max |
| 3'' - a1>max, a2>max, a3>max |
| 4'' - a1>max, a2>max |
| 5'' - a2>max, a3>max |
| 6'' - a2>max, a3>max |
| 7'' - a1>max |
| 8'' - a1>max, a3>max |
| 9'' - a1>max, a2>max, a3>max |

| |
|---|
| 1 - Сокращение продаж активов, изъятие вложений; |
| 2 - Внешний рост: вертикальная интеграция, покупка технологий; |
| 3 - Внешний рост: горизонтальная интеграция, интеграция в альянс. Аутсорсинг; |
| 4 - Внешняя диверсификация, рекомбинация компаний, реструктуризация; |
| 5 - Внутренний рост: развитие рынка, сотрудничество с покупателем; |
| 6 - Внутренний рост: развитие рынка, сотрудничество с покупателем; |
| 7 - Внутренняя диверсификация, модернизация производства, обучение персонала; |
| 8 - Внутренний рост: инновации; |
| 9 - Внутренний концентрированный рост. |

Надо активизировать:
8'' - a1>max, a3>max

Это означает, что надо максимизировать по принципам:
(a1) разделение труда, подчинение личных интересов общим, справедливость, инициатива
(a3) дисциплина, вознаграждение труда, централизация, порядок

5 - Внутренний рост: развитие рынка, сотрудничество с покупателем;

Подробнее

Рис.4. Интерфейс процедур активизации потенциала управления

Алгоритм активизации $\xi : \Pi_{bh}^{A_c} \cap \Pi_{em}^{A_c} \rightarrow \Pi_y^{A_c}$.

Для этого центр A_c в первую очередь должен оценить $\Pi_{bh}^{A_c}$, а затем $\Pi_{em}^{A_c}$. Только после этих процедур можно оценить компоненты потенциала управления, принадлежащие к активизации. Для этого из точки пересечения линии $\Pi_{bh}^{A_c}$ и $\Pi_{em}^{A_c}$ вертикально вниз

опускаем линию. Эта линия покажет атрибуты $\Pi_y^{A_c}$, подлежащие активизации.

Как известно, $\Pi_{bh}^{A_c}$ (внешний потенциал организации), $\Pi_{em}^{A_c}$ (внутренний потенциал организации) и $\Pi_y^{A_c}$ (потенциал управления A_c) определяются в виде матрицы в процедуре

планирования центром A_c . Заполнения этих матриц описаны в работах [9,16].

Интерфейс работы алгоритмов SWOT-анализ, VRIO-анализ и АПУ- анализ показан на рис. 4.

Предложенная концепция апробирована на 100 активных системах, существующих от 1 года до 10 лет.

При проведении эксперимента A_c разделили на четыре группы:

- A: деятельность A_c , ориентированная на $\Pi_{\text{бн}}^{A_c}$;

- B: деятельность A_c , ориентированная на $\Pi_{\text{бн}}^{A_c}$;

- E: деятельность A_c , ориентированная на $\Pi_y^{A_c} \& \Pi_{\text{бн}}^{A_c}$;

- C: деятельность A_c , ориентированная на $(\Pi_{\text{бн}}^{A_c} \cap \Pi_y^{A_c}) \rightarrow \Pi_y^{A_c}$.

Анализ деятельности этих активных систем показал, что деятельность A_c , входящая в группу C, ориентированную на активизацию управления, существует более или менее устойчиво (рис. 5).

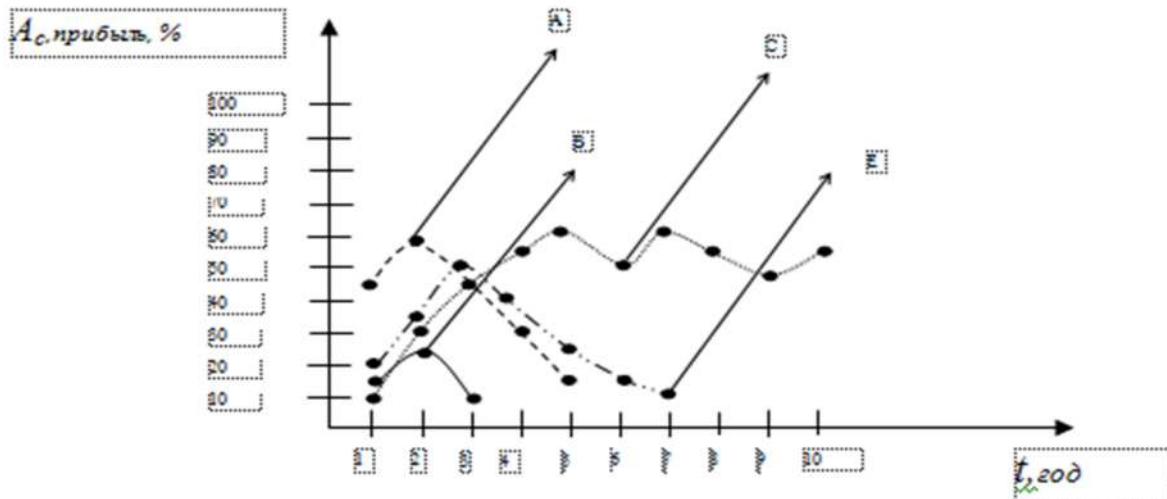


Рис. 5. Устойчивость различных A_c в зависимости от ориентации деятельности

5. Выводы

Потенциал управления организации $\Pi_y^{A_c}$ и его активизация всегда влияют на устойчивость активной системы. Повышение устойчивости организационных структур, при ограниченности ресурсов, имеет жизненно важное значение. Сама процедура активизации сильно зависит от оценки использования соотношений компонентов потенциала системы $\Pi_o^{A_c}$. С другой стороны, эффективное управление активной системой требует эффективной процедуры A_k , так как в процессе управления без обратной связи центр организации не может принимать оперативно управленических решений. Поэтому в A_c будет разумным, если представлять передачу сообщений \hat{S} о выполнении

плана активным элементом A_c организации с помощью процедуры административного контроля A_k . Необходимость этого возникает из-за существования в структурах A_c и между активными элементами реакции на управляющие воздействия $G(\eta)$. В этом случае искажение сообщений \hat{S} , передаваемое центру, будет минимальным. За счет этого устойчивость управления максимизируется. В принципе устойчивость активных систем, как показали наши эксперименты, зависит от того, в каких пропорциях центр использует $\Pi_{\text{бн}}^{A_c}, \Pi_{\text{бн}}^{A_c}, \Pi_y^{A_c}$, а также от того, что во время оперативного использования компонентов потенциала активной системы $\Pi_{\text{бн}}^{A_c}, \Pi_{\text{бн}}^{A_c}$ будет активизировать $\Pi_y^{A_c}$.

Литература

- [1] Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
- [2] Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. – М.: Синтег, 2004. – 400 с.
- [3] Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2007. – 584 с.
- [4] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
- [5] Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
- [6] Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J. R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

- [7] Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999. – 108 с.
- [8] Смирнов Э.А. Основы теории организаций. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 375 с.
- [9] Рустамов Н.Т., Жасузакова М.Ж. Алгоритмический и программный инструментарий стратегического планирования. – Ташкент: Fan va texnologiya, 2013. – 120 с.
- [10] Грант Р.М. Ресурсная теория конкурентных преимуществ: практические выводы для формирования стратегии // Вестник СибГУ. Сер.8. Менеджмент. – 2003. – Вып. 3. – С. 47-45.
- [11] Рустамов Н.Т., Азретбергенова Г.Ж., Жасузакова М.Ж. Активизация потенциала управления организаций. – Алматы: Экономика, 2015. – 140 с.
- [12] Рустамов Н.Т., Ибраим М., Абдрахманов Р.Б. Закономерности организационных успехов и неудач. – Ташкент: Fan va texnologiya, 2009. – 200 с.
- [13] Рустамов Н.Т., Абдрахманов Р.Б. Управляемость и условие неманипулируемости сообщений о выполнении плана элементами активной системы // Труды Четвертой Международной конференции по проблемам управления. – Москва: ИПУ им. В.А. Трапезникова, 2009. – С.1258-1268.
- [14] Rustamov N., Dosanov N. Effect of Administrative Control Procedures to Efficiency of Organization Management // International Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – Vol. 9. № 11. – Pp. 521-526. – www.m-hikari.com. <http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2015.411356>.
- [15] Виханский О.С., Наумов А.И. Менеджмент: учебник. – 3-е изд. – М.: Гардарики, 2000. – 528 с.
- [16] Лагунова Е.В. Стратегический потенциал компании и его оценка // Проблемы управления. – М., 2007. – № 6. – С. 40-44.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ ВЕСОВЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Шадиметов Х.М.

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Компьютерная графика и информационной технологии»
Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта,
тел.: +(99890) 620-20-84, e-mail: shadimetov@mail.ru

Жалолов О.И.

к.ф.-м.н., доцент кафедры информационной технологии Бухарского государственного университета,
тел.: + (99891) 648-35-29, e-mail: ozod-jalolov@mail.ru

Ведется исследование для кубатурных формул в функциональных пространствах С.Л. Соболева $L_2^{(m)}$ и L_2^m для функций, заданных в n -мерной единичной сфере. В пространстве L_2^m вычислена норма функционала погрешности весовых кубатурных формул типа Эрмита и найдена экстремальная функция. Получена оценка сверху для нормы функционала погрешности весовых кубатурных формул и на основе теоремы Бахвалова в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ построена оптимальная по порядку сходимости кубатурная формула для функций, заданных в n -мерной единичной сфере.

Ключевые слова: пространство, кубатурная формула, функционал погрешности, экстремальная функция.

**CALCULATION THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL BY ORDER CONVERGENCE
OF THE OPTIMAL CUBATURE FORMULAS TYPE ERMIT IN THE SOBOLEV SPACE**
Shodimetov H.M., Jalolov O.I.

In the work the research is conducted for cubature formulas in functional spaces S.L. Sobolev of $L_2^{(m)}$ and L_2^m for the functions specified in the n -dimensional unit sphere. In the space L_2^m the norm of error functional of weight cubature formulas of Ermit is calculated and extreme function was found. We obtain an upper estimate for the norm of the error functional of cubature formulas and weighting based on the theorem Bahvalova space $L_2^{(m)}(S)$ built for optimal convergence order cubature formula for the functions defined in the n -dimensional unit sphere.

Keywords: space, cubature formula, functional error, extremal function.

**SOBOLEV FAZOSIDA ERMIT TIPIDAGI KUBATUR FORMULA HATOLIC
FUNKCİONALINING NORMASINI HISOBŁASH VA YAGINLASHISH TARTIBI BUEICHA
OPTIMAL KUBATUR FORMULA GURISH**
Shodimetov H.M., Jalolov O.I.

Ishda n-o'lchovli birlik sferada berilgan funksiyalar uchun S.L.Sobolevning $L_2^{(m)}(S)$ va $L_2^m(S)$ funksional fazolarida kubatur formulalar uchun izlanishlar olib borilgan. L_2^m fazoda Ermit tipidagi vaznli kubatur formula ekstremal funksiyasi topilgan va hatolik funksionali normasini hisoblangan. Vaznli kubatur formula hatolik funksionali normasi uchun yuqoridan baho olingan va N. S. Bahvalov teoremasiga asoson n-o'lchovli birlik sferada berilgan funksiyalar uchun $L_2^{(m)}(S)$ fazoda yaqinlashish tartibi bo'yicha Ermit tipidagi optimal kubatur formula qurilgan.

Tayanch iboralar: fazo, funksional hatolik, kubatur formula, ekstremal funksiya.

1. Введение

В последнее время много работ посвящено построению кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов по поверхности сфер, точных для сферических гармоник некоторого порядка [1-11].

Пусть функции $f(\theta)$, заданные на единичной сфере S , принадлежат некоторому банаховому пространству B , вложенному в пространство $C(S)$ непрерывных функций на S . Функции $f(\theta) \in B$ продолжим на все пространство R^n , считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы S и будем обозначать через $\bar{f}(\theta)$, где S - n -мерная единичная сфера.

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S p(\theta) f(\theta) d\theta \approx \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \quad (1)$$

на функциях из B :

$$\begin{aligned} <\ell_N^{(\alpha)}, f> = \int_S p(\theta) f(\theta) d\theta - \\ - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell_N^{(\alpha)}(\theta) f(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \delta_s(1-r) p(\theta) - \\ - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \end{aligned} \quad (3)$$

$\delta_s(1-r)$, $\delta(\theta - \theta^{(\lambda)})$ - дельта-функции Дирака,

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \hat{p}_{0,0}, \\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ и } \int_S p(\theta) d\theta < \infty, \quad 0 \leq t \leq m. \end{aligned}$$

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданным на B , и в силу предположения вложенности $B \rightarrow C(S)$ этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ будет непрерывным.

2. Постановка задачи

В пространстве B норма определяется по формуле

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | B^* \right\| = \sup_{f \in B, \|f\| \neq 0} \frac{|<\ell_N^{(\alpha)}, f>|}{\|f| B\|}.$$

Функция $f_0 \in B$, для которой имеет место равенство

$$|<\ell_N^{(\alpha)}, f_0>| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} | B^* \right\| \cdot \|f_0| B\|,$$

называется *экстремальной функцией*.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства B , равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое,

нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы.

Для решения этой задачи в качестве B возьмём пространство $L_2^m(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство $L_2^m(S)$

определяется как пространство функций, заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m , норма которых определяется равенством [9]:

$$\left\| f | L_2^m(S) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \quad (4)$$

где $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$, и предположим, что $2m > n$.

3. Вычисление нормы функционала погрешности весовых кубатурных формул типа Эрмита над пространством Соболева для функций, заданных на n -мерной единичной сфере

Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности (3) и оценить ее.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$ (3) кубатурной формулы типа Эрмита (1) над пространством $L_2^m(S)$ равна

$$\begin{aligned} \left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^m(S) \right\| = \\ = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\hat{p}_{k,\ell} = \int_S p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta$.

Доказательство. Известно [9], что если $f(\theta) \in L_2^m(S)$, то для абсолютной и равномерной сходимости ряда

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta),$$

где $Y_k(\theta)$ - сферические гармоники порядка k , достаточно выполнение условия $2m > n$.

Таким образом, функция $f(\theta) \in L_2^m$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (5)$$

где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ , $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник, т.е.

$$\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} (n+2k-2).$$

Подставляя (5) в левую часть (2), находим

$$\begin{aligned} & \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle = \langle \delta_S(1-r)p(\theta) - \\ & - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) , \\ & \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\ & = \langle \delta_S(1-r)p(\theta), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle - \\ & - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) , \\ & \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\ & = \int_S p(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \\ & - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) , \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \int_S p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) , \\ & Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Если в правой части (6) $a_{k,\ell}$ умножить на $\frac{m}{k^2} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}$, а кубатурную сумму разделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то с учетом равенства (4) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \frac{m}{k^2} (k+n-2)^{\frac{m}{2}} \times \\ & \times \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ & = \|f/L_2^m(S)\| \times \\ & \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) следует

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S) \right\| \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что в (8) равенство достигается для функции

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \quad (9)$$

из $L_2^m(S)$, где

$$b_{k,\ell} = \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m}. \quad (10)$$

Действительно, так как для сферических функций имеет место оценка [10]:

$$\max |Y_k(\theta)| \leq C(n) k^{-m+\frac{n}{2}-1} \|f(\theta)/L_2^m(S)\|,$$

то из определения (10) коэффициентов ряда (9) следует, что $U(\theta) \in L_2^m(S)$.

Вычислив погрешность (6) кубатурной формулы для этой функции, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, U \rangle \right| = \\ & = \left| \langle \delta_S(1-r)p(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) , \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[<\delta_S(1-r)p(\theta), Y_{k,\ell}(\theta) > - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} <\delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) > \right] \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int_S p(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right] \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \left[\frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \right]^2 \right| = \quad (11) \\
&= \|U/L_2^m(S)\|^2.
\end{aligned}$$

Сопоставляя (8) и (11), находим, что

$$\|\ell_N^{(\alpha)}|L_2^{m*}(S)\| = \|U|L_2^m(S)\|,$$

где $U(\theta)$ является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е. $U(\theta)$ - функция Рисса для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать.

Из (11) следует следующая

ТЕОРЕМА 2. Функция

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta)$$

является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1) и $U(\theta) \in L_2^m(S)$, где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - ортонормированная сферическая гармоника порядка k , вида ℓ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник порядка k .

4. Весовые оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(S)$ для функций, заданных на n -мерной единичной сфере

В настоящем разделе рассматриваются кубатурные формулы (1) с функционалом погрешности:

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = p(\theta) \varepsilon_s(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}). \quad (12)$$

Пусть функционалы погрешностей одномерных весовых квадратурных формул типа Эрмита имеют вид

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i) = p(\theta_i) \varepsilon_{\Omega_i}(\theta_i) - \sum_{\alpha_i=1}^m \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)} \delta^{(\alpha_i)}(\theta_i - \theta_i^{(\lambda_i)}),$$

$$p(\theta) = \prod_{i=1}^n p_i(\theta_i),$$

$$\text{где } \Omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n, \\ [0, \pi], & i = \overline{1, (n-1)}, \end{cases}$$

и функционал погрешности (12) кубатурной формулы вида (1) представляется в виде

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

$$\text{Обозначим } \ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \prod_{i=1}^n \ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i).$$

В работе Г.Н.Салихова [8] показано, что пространство $L_2^m(S)$ по составу своих элементов совпадает с аналогичным пространством $L_2^{(m)}(S)$ С.Л.Соболева нормой

$$\|f/L_2^{(m)}(S)\| = \left\{ \int_S \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(\theta))^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В одномерном случае для $f_i \in L_2^{(m)}(\Omega_i)$ норма определяется так:

$$\|f_i/L_2^{(m)}(\Omega_i)\| = \left\{ \int_{\Omega_i} \left(\frac{d^m}{d\theta_i^m} f(\theta_i) \right)^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Если $f(\theta)$ из пространства $L_2^{(m)}(S)$

($2m > n$) и для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ кубатурной формулы вида (1) выполняются условия $\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n)$ и

$$\|\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}|L_2^{(m)}(\Omega_i)\| \leq K_i N_i^{-m}, \quad (13)$$

$$\text{где } \Omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n, \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

$$\text{то } \|\ell_N^{(\alpha)}|L_2^{(m)*}(S)\| \leq \sum_{i=1}^n K_i^1 N_i^{-m}.$$

Доказательство. Наиболее очевидным подходом к интегрированию по n -мерной единичной сфере является рассмотрение интеграла как n -раз повторного интеграла и применение 1-мерной весовой квадратурной формулы по каждой переменной отдельно (см.[2]). Таким образом, если $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}$ - весовые квадратурные формулы типа Эрмита для интервалов $\Omega_i (i = \overline{1, n})$, то

$$\begin{aligned}
& \int_S p(\theta) f(\theta) d\theta = \\
&= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} p(\theta_1, \dots, \theta_n) f(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n \approx \\
&\approx \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{n-1}} Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1) d\theta_2, d\theta_3 \dots d\theta_{n-1} \approx \quad (14) \\
&\approx \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{n-2}} Q_2^{(\alpha_2)}(Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2) d\theta_3 \dots d\theta_{n-1} \approx \\
&\approx Q_n^{(\alpha_n)}(Q_{n-1}^{(\alpha_{n-1})}(\dots Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2); \dots; \theta_n).
\end{aligned}$$

Последнее выражение (14) является как раз линейной комбинацией значений f . Действительно, если

$$Q_j^{(i)}(g) = \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i} g^{(\alpha_i)}(\theta_j^{\lambda_i}), \quad j = \overline{1, n},$$

то последнее выражение в (14) в точности есть

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \dots \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \\
& \dots C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} f^{(\alpha)}(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n^{\lambda_n}).
\end{aligned}$$

Последнее выражение обозначим через $(Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}) f$ или $\left(\prod_{i=1}^{n-1} Q_i^{(\alpha_i)} \right) f$, и кубатурную формулу $Q^{(\alpha)} = (Q_1^{(\alpha_1)} \cdot Q_2^{(\alpha_2)} \dots \cdot Q_n^{(\alpha_n)})$ назовем формулой «декартовое произведение», поскольку множество точек, на которых вычисляется значение f в (14), является декартовым произведением множества узлов формул $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}$. Легко заметить, что если для каждого i $d_i^{(\alpha_i)}$ является степенью точности $Q_i^{\alpha_i}$, тогда степень точности $Q^{(\alpha)}$ есть $\min(d_1^{(\alpha_1)}, d_2^{(\alpha_2)}, \dots, d_n^{(\alpha_n)})$.

Пусть нам известно, что

$$\left| \int_{\Omega_i} f(\theta_i) p_i(\theta_i) d\theta_i - Q_i^{(\alpha_i)}(f, \theta_i) \right| = E_i^{(\alpha_i)} \quad (15)$$

для всех значений $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n$, лежащих на интервалах Ω_i , и что мы имеем 1- мерную оценку погрешности для каждого i от 1 до n .

В дальнейшем $A_i^{(\alpha_i)}$ обозначает сумму абсолютных значений коэффициентов в формуле $Q_i^{(\alpha_i)}$. Для получения оценки погрешности кубатурных формул (1) используем понятие экстремальной функции функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$, введенное С.Л. Соболевым [12].

Учитывая теорему 2 и это определение, имеем $U(\theta) = \psi_\ell(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$.

Известно, что [11]:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*}(S) \right\|^2 = \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)}(S) \right\|^2 = |\langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) \rangle|.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
|\langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) \rangle| &= \left| \int_S \psi_\ell(\theta) ds - \left(\prod_{i=1}^n Q_i^{(\alpha_i)} \right) \psi_\ell \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_2 \dots d\theta_n \right| \left| \int_{\Omega_1} \psi_\ell d\theta_1 - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) \right| + \\
&+ \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \left| \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| = \\
&= \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_2 \dots d\theta_n E_1 + \\
&+ \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \left| \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_2^{(\lambda_2)}, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_2^{(\lambda_2)}, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} C_{\lambda_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \leq \\
&\leq C_1 E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_3 \dots d\theta_n \left| \int_{\Omega_2} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n) \right| + \right. \\
& \left. + \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \left| C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \right| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \right. \\
& \left. - \sum_{\alpha_3=1}^{m_3} \sum_{\lambda_3=1}^{N_3} C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n^{\lambda_n}) \right\} = \\
& = C_1 E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_3 \dots d\theta_n E_2 + \\
& + \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \left| C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \right| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \\
& - \sum_{\alpha_3=1}^{m_3} \sum_{\lambda_3=1}^{N_3} C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n^{\lambda_n}) \leq \\
& \leq \dots \leq C_1 E_1^{(\alpha_1)} + C_2 A_1^{(\alpha_1)} E_2^{(\alpha_2)} + \\
& + C_3 A_1^{(\alpha_1)} A_2^{(\alpha_2)} E_3^{(\alpha_3)} + \dots + \\
& + C_n A_1^{(\alpha_1)} A_2^{(\alpha_2)} \dots E_n^{(\alpha_n)} A_{n-1} E_n^{(\alpha_n)}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Итак, для каждого i , учитывая

$$\left\{ \int_{\Omega_i} \frac{d^m}{d\theta_i^m} |\psi_\ell(\theta)|^2 d\theta_i \right\}^{1/2} \leq C \|\psi_\ell| L_2^{(m)}(S)\| \tag{17}$$

и оценки (13) и (17), из (15) получаем

Литература

- [1] Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы // СМЖ. – 1962. – Т.3, № 5. – С. 769-796.
- [2] Мысовских И.П. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы // СМЖ. – 1964. – Т. 5, № 3. – С.721-723.
- [3] Лебедов В.И. О квадратурах на сфере // ЖВМ и МФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 293-306.
- [4] McLaren D.A. Optimal numerical integration a Sphere // Math.Comp. – 1963. – Т.83. – Рп. 361-383.
- [5] Freedan W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere // Computing. – 1980. – Т. 23, № 2. – Рп. 131-146.
- [6] Freedan W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere // Bull. Geod. – 1978. – Vol. 52. – № 11. – Рп. 165-175.
- [7] Соболев С. Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. – Новосибирск, 1996. – 483 с.
- [8] Салихов Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985.
- [9] Салихов Г.Н. Оценка погрешности кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ // Докл. АН СССР. – Москва, 1975. – Т.223, № 6. – С. 1318-1321.
- [10] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 724 с.
- [11] Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева: дис. доктора физ.-мат. наук. – Ташкент, 2002. – 218 с.
- [12] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
- [13] Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Матем.заметки. – Москва. – 1972. – Т.12, № 6. – С. 655-664.
- [14] Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.

$$\begin{aligned}
E_i^{(\alpha_i)}(f) &\leq C \left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} | L_2^{(m)*}(\Omega_i) \right\| \times \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)}(S) \right\| \leq \\
&\leq C K_i N_i^{-m} \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)}(S) \right\|. \tag{18}
\end{aligned}$$

Подставляя (18) в (16), имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*}(S) \right\| \leq \sum_{i=1}^n K_i^1 N_i^{-m}. \tag{19}$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть справедливо

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} | L_2^{(m)*}(\Omega_i) \right\| \leq K_i N_i^{-m},$$

кроме того, $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ и $\prod_{i=1}^n N_i = N$,

тогда кубатурная формула вида (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdots \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

является оптимальной по порядку сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(S)$, т.е.

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*}(S) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}}\right).$$

Доказательство. На основе леммы, так как

$N_1 = N_2 = \dots = N_n$, то из $\prod_{i=1}^n N_i = N$ имеем

$$N_1 = N^{\frac{1}{n}}. \tag{20}$$

Учитывая (20), из (19) получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*}(S) \right\| \leq N^{-\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^n K_i^1. \tag{21}$$

Используя [13, 14] и (21), получаем утверждение теоремы.

УДК 004.42

WEB-DASTURLASH TILLARI YORDAMIDA MATN TARJIMALOVCHI DASTUR YARATISH

Uteuliiev N.U.

f. m.f.d., professor, Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Nukus filiali,
tel.: +(8361) 222-49-10, e-mail: utewlievn@mail.ru

Abdalieva G.R.

f.f.n., dotsent, Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Nukus filiali,
tel.: +(99891) 375-14-28, e-mail: abdalieva_g@umail.uz

Sernazarov R.A.

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Nukus filiali talabasi,
tel.: +(99891) 384-29-30, e-mail: agent_kyu@list.ru

Achilov D.S.

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Nukus filiali talabasi,
tel.: +(99893) 707-73-71, e-mail: achilov21@yandex.com

Ushbu maqolada bir tildagi elektron hujjat matnlarini boshqa tillarga mashina yordamida tarjima qilish usullaridan foydalanib matn va so'zlarni o'zbek tilidan qoraqalpoq tiliga va aksincha qoraqalpoq tilidan o'zbek tiliga tarjima qilish dasturini yaratish masalasi o'rGANILADI. Har xil elektron hujjat matnlarini kamchiliksiz, asliy hususiyatlarini yo'qotmagan holda, bir tildan ikkinchi tilga sifatli tarjima qiluvchi tarjimon dasturi haqida fikr yuritiladi.

Tayanch iboralar: mashina tarjimasi, web-sayt, web-dasturlash, tarjima modeli, muntazam ifoda, web-server.

СОЗДАНИЕ ПРОГРАММЫ ПЕРЕВОДА ТЕКСТОВ
С ПОМОЩЬЮ ЯЗЫКОВ WEB-ПРОГРАММИРОВАНИЯ
Утеулиев Н.У., Абдалиева Г.Р., Серназаров Р.А., Ачилов Д.С.

Рассматриваются вопросы создания программы перевода текстов и слов с узбекского языка на каракалпакский и наоборот с помощью компьютерных методов перевода электронных документальных текстов с одного языка на другой. Речь идет о программе - переводчике, позволяющей сделать качественный перевод с одного языка на другой без существенных недостатков, без потери стилистических особенностей текста.

Ключевые слова: машинный перевод, веб-сайт, веб-программирование, модель перевода, регулярное выражение, веб-сервер.

DEVELOPMENT OF TEXTS TRANSLATION SOFTWARE
USING WEB PROGRAMMING LANGUAGES
Uteuliev N.U., Abdalieva G.R., Sernazarov R.A., Achilov D.S.

Proposed article considers the issues of developing the program for translation of texts and words from Uzbek to Karakalpak language and vice versa, by means of computer methods of electronic documentary text translation from one language to another. The program allows to perform quality translation from one language to another without significant defects, or loss of the stylistic particularities of the electronic text.

Keywords: machine translation, web site, web programming, translation model, regular expression, web server.

1. Kirish

Ma'lumki, tarjima bir tildagi matnni boshqa tilga o'girishdan iborat bo'lgan adabiy ijod turi hisoblanadi. Bu soha azaldan millatlararo aloqalarni ta'minlashda muhim ahamiyatga ega bo'lib kelgan va hozir ham o'z mavqeini yo'qtogani yo'q. Millatlararo muloqotning eng muhim ko'rinishi hisoblanmish tarjimaning bir qancha turlari mavjud. U aslyiat va qayta tiklangan matn xususiyatiga qarab badiiy tarjima, ilmiy tarjima va boshqa turlarga ajratiladi. Asl nusxani aks ettirish xususiyatiga ko'ra tavsif, tadbil, sharh kabi ko'rinishlarga ham ega bo'lishi mumkin. Bu soha bo'yicha ko'pchilik o'zbek, qoraqalpoq [1-3] va xorijiy olimlarning ilmiy ishlarida [4-7] bir tildagi matn va so'zlarni boshqa tillarga tarjima qilish masalalari o'rganilgan va tarjima usullari, muammolari, talablari va aspektlari ochib berilgan. Axborot texnologiyalarining rivojlanishi tarjima sohasiga yangi "mashina tarjimasi" atamasini olib kirdi. Mashina tarjimasi yoxud kompyuterlashgan tarjima bu - kompyuter yordamida bajariladigan, bir tabiiy tildan boshqasiga maxsus kompyuter dasturi yordamida matnlarni (yozma yoki og'zaki) tarjima qilish jarayoni hisoblanadi. Yana shu kabi tizimlarni tuzishga bog'liq bo'lgan ilmiytadqiqotlar yo'nalishi ham shunday nomlanadi. Kompyuterlashgan tarjima, ko'p hollarda mashina tarjimasi deyiladi, bu esa sun'iy tafakkurga ega bo'lgan amaliy jarayon tomonidan bajariladi [8]. Mashina tarjimasining asosi bo'lgan tarjima modeli tushunchasini izohlab o'taylik. Tarjima modeli – bu jadval shaklida berilgan bo'lib, unda bir tildagi tizimga oid bo'lgan barcha so'zlar va frazalarning boshqa tilga tarjima qilgandagi mavjud ma'nolari beriladi va shu ma'nolarning ehtimolligi ko'rsatiladi. Tarjima modeli uch bosqichdan tashkil topgan: birinchi bosqichda parallel hujjatlar, ikkinchi bosqichda ularning ichidan gaplarning juftliklari va uchinchi bosqichda esa so'z yoki so'z birikmalarining juftliklari tarjima qilinadi [9].

2. Masalaning qo'yilishi

Masalaning e'tiborga molik tomoni turkiy tillardagi ilmiy, badiiy, publisistik, rasmiy uslublar ko'laming qiyosiy tadqiqi yetarlicha amalga oshirilmaganligidadir. Ma'lumki, elektron ma'lumotlar hajmining ko'pligi bo'yicha ingliz va rus tillari muhim o'rinni egallaydi. Matnlarni chet tillardan turkiy tillarga, turkiy tillardan chet tillarga yoki bir turkiy tildan boshqasiga (*o'zbek-qoraqalpoq, qoraqalpoq-o'zbek*) kompyuter dasturlarisiz tarjima qilish jarayoni ancha murakkab va ko'p vaqt talab qiladigan jarayon. Aniqrog'i, tarjima jarayonida so'zlarining semantik tarkibi rang-barangligi, gap bo'laklari tartibining o'zgarishi (*invertsya*), so'zlar o'rtasidagi polisemija (*ko'p ma'nolilik*), omonimiya (*shakldoshlik*), troplar (*ma'no ko'chish turlari*), frazeologik birliklar xususiyatlarini hisobga olish lozim. Tadqiqotda so'z, so'z birikmalar, gap va iboralarni bir tildan boshqa tilga sifatlari tarjima qilish masalalari qo'yiladi va tahlil qilinadi.

Hozirgacha har xil hujjatlar bilan ish yurituvchi tashkilotlar, ta'lim muassasalarini va boshqa sohalar uchun

turli maqsadlarda bir tildagi matnlarni ikkinchi bir tilga xatosiz tarjima qilish masalasi turli munozaralarga sabab bo'lib qolmoqda. Masalaning dolzarbliji shundaki, bevosita inson qo'li bilan yozma ravishda yoki to'g'ridan to'g'ri tarjima qilish jarayonini amalga oshirish birinchidan, ko'p vaqtini talab qiladi va ikkinchidan, turli xatolarni keltirib chiqarishi mumkin.

Tarjimon dasturini yaratishdan maqsad – tarjima jarayonining sifatini yaxshilash, avtomatlashtirish va qulayliklar yaratishdan iborat..

3. Tarjima jarayonini kompyuter yordamida amalga oshirish usullari

Kompyuter yordamida tarjima qilish algoritmlarini tuzishda ikkita raqobatdosh texnologiya mavjud bo'lib, bular: **qonuniyatlariga asoslangan tarjima** (*rule-based machine translation*) va **statistikaga asoslangan tarjima** (*statistical-based machine translation*) usullaridir. Bu usullarni bir-biriga qiyoslaganda afzalliklari va kamchilik tomonlari ham kuzatiladi. Birinchi usul an'anaviy bo'lib, bu usulda ishlovchi tizimlar (Rossiyada *Promt*, Frantsiyada *SYSTRAN*, Germaniyada *Linguatec* va boshqalar) [8,10] keng qo'llaniladi. An'anaviy usulda tarjima qilinadigan matn tizim tomonidan maxsus algoritmdan yordamida bir necha bosqichda tahlil qilinadi va tasdiqlangan tahlil tarjima variantiga biriktiriladi. Ikkinchi, statistika qonuniyatlariga asoslanib ishlovchi tarjima xizmatlariga *Google translate* [11], *Yandex tarjimoni* [12] va *ABBYY* [13] xizmatlarini keltirib o'tishimiz mumkin. Bu usulning an'anaviy usuldan farqli tomoni, bunda tarjima uchun lingvistik algoritmdan foydalanmasdan, stilistik bir-biriga mosligini qiyoslash orqali tarjima amalga oshiriladi. Statistika qonuniyatlariga asoslangan mashina tarjimasida katta ko'lamdagisi til juftliklari ikkinchi tildagi varianti bilan taqqoslanadi. Til juftliklari – bu bir tilga tegishli matn va gaplarning ularga mos ikkinchi parallel tildagi tarjimasi hisoblanadi. "Statistika qonuniyatlariga asoslangan mashina tarjimasi" tushunchasi ikki tildagi matnlarni birlashtirishdan olingan ma'lumotlardan foydalanib, gaplarning ehtimolligi yuqori bo'lgan tarjimasini izlashga asoslangan, tarjima qilish muammosining yechimga yo'naltirilgan umumiyo yo'nalishi deb bilamiz. Masalan, Yevropa iqtisodiy birlashmasining rasmiy hujjatlari 11 tilda bosib chiqariladi; BMT bo'lsa, hujjatlarini bir necha tilda bosib chiqaradi. Bu materiallar statistik mashina tarjimasi uchun beba yoqoriladi. Resurslar bo'lib hisoblanadi [8, 10]. O'zbekiston Respublikasi o'quv o'rinlaridagi o'qitiladigan bir necha tillardagi o'quv darsliklar, hujjatlar va ikkinchi tilga tarjima qilingan badiiy asarlar bizga turkiy tillar tarjimon dasturi bazasini kengaytirishda keng imkoniyat yaratib beradi.

3.1. Mashina tarjimasi usullaridan foydalanib, tarjimon dasturini yaratish

Tarjima jarayonini kompyuter orqali amalga oshirish va bu masala yuzasidan yangi yaratilayotgan dasturimiz haqida to'xtalib o'tamiz. Dasturni ishlab chiqishda web-

dasturlash tillaridan foydalanildi va dasturlashtirish jarayonining navbatdagi bosqichi davom ettirilmoqda.

Tarjimon dasturini yaratishda quyidagi web-teknologiyalardan foydalanildi:

- PHP;
- Java Script;
- HTML;
- Jquery;
- MySQL;
- CSS.

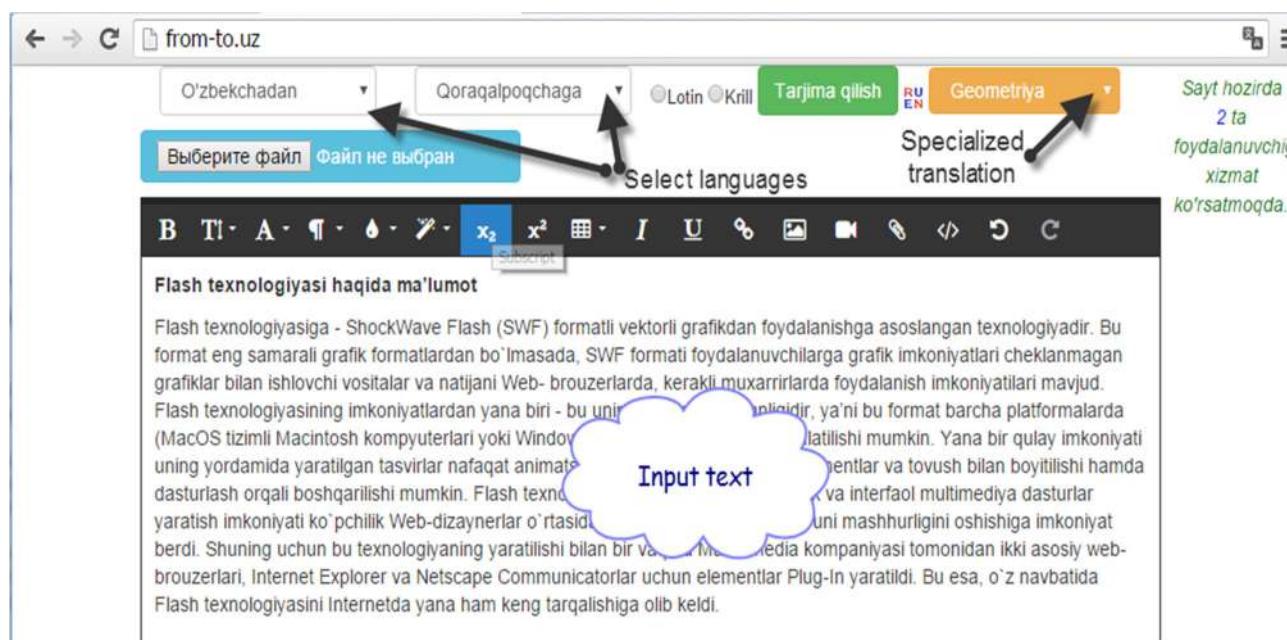
Dastur interfeysining asosiy qismi hisoblanmish matn kiritish oynasi (*textarea*) *JQuery* kutubxonasi yordamida yaratildi. Sababi textarea katta ko'lamdagi matnlarni kiritishda qulay hisoblanadi. *JQuery* esa matn oynasining funksional imkoniyatlarini oshiradi. Qolgan dizaynlar bilan ishslashda *HTML* va *CSS* dan foydalanildi.

Dasturning tarjima qilish algoritimini ishlab chiqishda, asosan, o'zbek va qoraqalpoq tillarining stilistik va grammatic qonuniyatlariga tayanildi. Turkiy tillar oilasiga mansub tillardagi matnlarni tarjima qilishda so'z birikmalari, neologizmlar, sinonimlar va iboralar qiyinchilik tug'diradi. Shuni hisobga olgan holda dasturda tarjima qilinishi zarur bo'lgan matn ichidan oldin ko'lami bo'yicha uzunlari, ya'ni eng ko'p elementlisi tartib bo'yicha tanlab olinadi va ikkinchi tilga tarjima qilinadi. Shu asnoda so'z birikmalarining ma'no buzilishining oldi olinadi. Dasturning ma'lumotlar bazasi uning eng asosiy qismi hisoblanadi. Tarjima natijasining sifatli bo'lishi, ma'lumotlar bazasi ko'lamiga bog'liq. Shu sababdan ma'lumotlar bazasi uzlusiz to'ldirilib boriladi hamda foydalanuvchilarning taklif va mulohazalari hisobga olinadi. Matnni tarjima qilish bosqichida, qatorlar bilan ishslashda yana bir kuchli vosita muntazam ifodalar bo'lib, ular yordamida ko'lami

va murakkabligidan qat'iy nazar har qanday qatorlar bilan ishslash imkoniyati mavjud. Bu esa tarjima jarayonida yuz beradigan stilistik muammolarni yechish imkoniyatini yaratadi. Mashina tarjimasi usulidan foydalanganda parallel matnlar ishlataladi va dasturdan katta ko'lamdagi qo'shma so'zlar va iboralar bilan ishslash talab qilinadi. Til bazasidagi elementlar sonining oshishi, yuqori tezlik va katta xotirani talab etadi. Tarjima jarayonida gaplarning ma'nosini yo'qotmaslik uchun dastur oldin so'z birikmalari va frazalarni sodda so'zlardan ajrata olishi zarur bo'ladi. Buning uchun dasturdan tarjimani bir qancha bosqichda olib borish, ya'ni dastlab parallel gaplar, so'ngra so'z birikmalari va so'zlarni taqqoslash talab qilinadi. Masalan: o'zbekcha "Yangi shahar yujudga keldi" gapini qoraqalpoqcha tarjimasi "*Jan'a qala payda boldi*" deb tarjima qilish to'g'ri bo'ladi. Bu gapni so'zma-so'z tarjima qilganda "*Jan'a qala deneg'e keldi*" kabi xatolik yuz bergan bo'lar edi. Biroq yevropa tillaridan turkiy tillarga tarjima qilish uchun katta ko'lamdagi tarjima modeli asosidagi bazaga ehtiyoj tug'iladi. Shu joydan ham tarjima modelining qanchalik ahamiyatga ega ekanligini anglash mumkin.

3.2. Tarjima jarayonining ketma-ketligi

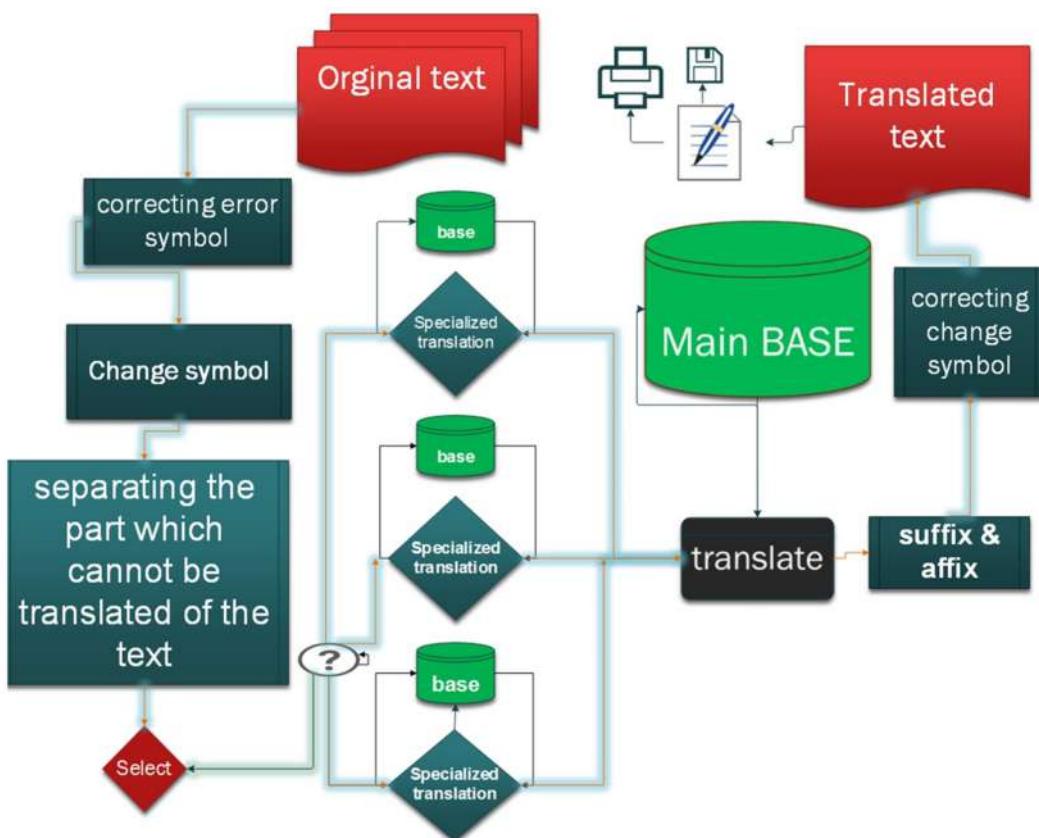
Ushbu tarjimon dasturidan foydalanish uchun internetga ulangan kompyuter, planshet yoki mobil telefondag'i web-brouzerlar orqali *from-to.uz* saytining manziliga kirish lozim. Foydalanuvchilar o'ziga kerakli matnni tarjima qilish uchun saytning bosh sahifasidagi matn kiritish formasiga matnni kiritadi va kerakli tillarni tanlab "**Tarjima qilish**" tugmasini bosadi (1-rasm).



1-rasm. Yuqorida rasmda web-saytning matn kiritish oynasi aks etgan

Jo'natilgan matn serverdag'i dastur yordamida qayta ishlanadi va tayyor tarjima qilingan holda mijoz brouzeriga generatsiya qilinadi. Dasturning asosiy tarjima qilish funksiyasi web-dasturlash tillari yordamida

amalga oshiriladi. Tarjima jarayoni bir qancha bosqichlardan iborat bo'lib, u quyidagi sxemada keltirilgan (2-rasm).



2-rasm. Tarjima jarayonining sxemasi

Tarjima jarayonining ketma-ketligi:

- 1) Matn maxsus oynaga kiritiladi.
- 2) Tarjima uchun kerakli tillar va ixtisoslik tanlanadi.
- 3) Matn tarjimaga jo'natiladi.
- 4) Kiritilgan matn ichidagi belgililar qayta kodlanadi.
- 5) Matnning tarjima qilinmaydigan qismi ajratib olinadi.
- 6) Ma'lumot qayta ishlanadi va tarjimaga tayyorlanadi.
- 7) Ixtisoslik va asosiy umumlashgan baza yordamida tarjima amalga oshiriladi.
- 8) Qo'shimchalar ustida amallar bajariladi.
- 9) Oldingi o'zgartirishlar joyiga qaytariladi va xatolar to'g'irlanadi.
- 10) Tayyor bo'lgan matn tarjima qilingan holda fayl yoki bufer orqali foydalanuvchiga uzatiladi.

Bundan tashqari kiritilgan matnning yuqori qismida *JQuery* asosida ishlovchi uskunalar paneli joylashtirilgan bo'lib, foydalanuvchiga huddi *Microsoft Office Word* dasturidagi kabi uskunalar panelini yaratib beradi. Uskunalar paneli (*toolbar*) orqali foydalanuvchi tomonidan kiritilgan matnni tahrirlay olish imkoniyatiga ega bo'ladi.

Uskunalar panelining imkoniyatlari:

- Shriftlarni qalin yoki kursiv shaklga o'tkazish;
- Shriftlarga rang berish;
- Qator va harflarning ostiga va ustiga chizish;
- Shriftlar turini belgilash;
- Shriftlar o'lchamini o'zgartirish;
- Shriftlarni katta yoki kichik shriftga o'zgartirish;
- Qator joylashish o'rnini belgilash;
- Raqamlash, markerlash va boshqa funksiyalar.

4. Natijalar tahlili

Yaratilgan dastur web-server uchun mo'ljallangan bo'lib, *Apache* bilan *MySQL* serverlarida sinab ko'rildi. *JQuery* va *JavaScript* animatsiyalari *Internet Explorer*, *Google Chrome*, *Mozilla*, *Opera*, *Safari* kabi brouzerlarning yangi versiyalarida sinovdan o'tkazildi.

Saytda *MS Word* hujjatlarini, *Excel* jadvallari va boshqa turdag'i elektron matnlarni tarjima qilish imkoniyati mavjud. Tarjimonning asosiy tarjima funksiyasi obye'ktga yo'naltirilgan *PHP* web-dasturlash tilida yaratilgan bo'lib, dastur skriptlarini *PHP 5* versiyasi qo'llab-quvvatlaydi. Animatsiya va boshqa effektlar *JavaScript* tilida, dizayn qismi *CSS* (sascading style sheets) da, matn kiritish oynasi (*textarea*), uskunalar paneli (tool bar) va jarayon ko'rsatkichi (progress bar) funksiyasi *JQuery* kutubxonasi yordamidan foydalanib yaratildi. Ma'lumotlar bazasiga bog'lanish va undan foydalanish uchun *MySQL* serveridan foydalanildi.

Ushbu dastur yordamida bir qancha (o'zbek, qoraqlpoq, rus, ingлиз, tojik, turkman, qirg'iz, qozoq va boshqa) tillarining elektron materiallarini bir tildan boshqasiga tarjima qilish ustida ilmiy-tadqiqot ishlari davom ettilrimoqda. Shu jumladan, web-sahifaga qo'shimcha tariqasida matnlarni lotinchadan-kirillchaga va kirillchadan-lotinchaga o'girish funksiyasi ham qo'shilgan.

Biz ishlab chiqqan tarjimon dasturimizning *Sokrat*, *Google Translate*, *Yandex tarjimoni*, *Ace Translate* va *Promt* kabi tarjimon dasturlardan farqli tomonlariga qisqacha to'xtalib o'tamiz:

The screenshot shows a web page from www.from-to.uz. At the top, it says "Sayt hozirda 2 ta foydalanuvchiga xizmat ko'rsatmoqda." Below the header, there's a logo for "www.from-to.uz" and a message: "Matnni taqqoslang va Oficce Word hujjatiga saqlab oling." A blue button labeled "Bosh saxifaga" is visible. In the center, there's a large blue cloud-like shape containing the text "Translated text". To the left of this, another smaller cloud shape contains "Flash texnologiyasi' haqqi'nda". To the right, another cloud shape contains "The first text". Above the clouds is a globe made of various country flags. On the far right, there's a sidebar titled "Statistika" with the following data:

| |
|-----------------------|
| Gaplar-8 |
| So'zlar-162 |
| Abzats-2 |
| Umumiy simvollar-1340 |

3-rasm. Saytning tarjima jarayoni yakunlanganidan keyingi ko'rinishi aks etgan

Masalan, *Sokrat* tarjimon dasturida tarjima qilingan matndagi rasmlar, jadvallar va boshqa xususiyatlari qoldirilib ketiladi. *Google translate* tarjimoni yordamida tarjima qilingan matnda ham shu kabi kamchiliklar mavjud bo'lib, matndagi rasmlar tushirilib qoldiriladi. Biz ishlab chiqqan tarjimon dasturining boshqa shu tarzda ishlaydigan dasturlardan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- tarjima jarayonida matnning original xususiyatlari (abzats, tabulyatsiya, qatorlar masofasi va boshqa) saqlanib qolinishi;
- matndagi rasmlar saqlanib qolinishi;
- harflarning xususiyatlari (rangi, o'lchami, shrift turi va boshqa) o'zgarmasligi;
- tarjima jarayonining tezligi;
- tarjima qilingan so'zlarning ma'nosini o'zgarmasligi;
- tarjimada oldin gap bo'yicha, keyin so'z bo'yicha taqoslash imkoniyati;
- matnni to'g'ridan-to'g'ri brouzerda tahrirlay olish imkoniyati;
- sayt interfeysining qulayligi;
- sahifani ko'pchilik qurilmalar qo'llab-quvvatlashi, ya'ni sahifa o'lchamining kompyuter, planshet yoki mobil telefon ekrani o'lchamiga qarab avtomatik moslashishi;
- ixtisoslik bo'yicha matn tarjimasi;
- tarjima jarayoni tugagandan keyin matnni yuklab olish imkoniyati.

Adabiyotlar

- [1] O'zbekcha - qoraqalpoqcha va qoraqalpoqcha - o'zbekcha lug'at / J. Bazarbaev, M. Buranov, G. Qurbaniyazov, A. Pirniyazova, Sh. Ayapov. – Toshkent, 2011. – 283 b.
- [2] Машинный перевод. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинный_перевод.
- [3] Yandex tarjima xizmati. – URL: <http://translate.yandex.ru>.
- [4] Kay M. The Proper Place of Men and Machines in Language Translation // Machine Translation. – 1997. – № 12. – Pp. 3-23.

Tarjima jarayonida kelib chiqishi mumkin bo'lgan muammolar sifatida quyidagi holatlarni ko'rsatib o'tish mumkin:

- keltirilgan matn tamomlanmagan bo'lsa, yoki yozilish jarayonida bo'lsa;
- matn noaniq yozilgan bo'lsa;
- matnda imloviy xatoliklar bo'lsa;
- qator yolg'iz parchadan iborat bo'lsa;
- matn qoniqarsiz holatda bo'lsa;
- matnda notanish va kam qo'llaniladigan belgilardan foydalanilsa;

Ushbu holatlarda, so'z va so'z birikmalarining ma'nosi va imlosida har xil xatolar yuz berishi va o'zgarishi ehtimolligi mavjud.

5. Xulosa

Xulosa qilib aytganda, tarjimon dasturimizda yuqorida ko'rsatilgan kamchiliklarning ko'pchiligi deyarli o'z yechimini topdi va dasturning qolgan bosqichlari ustida ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Tarjima natijasi va sifati baza ko'lamiga bog'liqligini hisobga olib, dasturning tarjima bazasi sayt faoliyati davomida uzlusiz to'liqtirilib boriladi.

Ishlab chiqilgan tarjimon dasturi yordamida foydalanuvchilar ixtisoslik bo'yicha ilmiy adabiyotlar, darsliklar, rasmiy hujjatlar va badiiy adabiyotlarni tarjima qilishda foydalanishi mumkin.

- [5] Щитова О.Г. Аспекты изучения иноязычной лексики русского языка: методическая разработка. – Томск: Изд-во гос. Пед. ун-та, 1996. – 32 с.
- [6] Комиссаров В.Н. Общая теория перевода. – М., 1999. – 108 с.
- [7] Русско-Каракалпакский словарь / Под ред. Н.А. Баскакова. – М., 1967. – 1123 с.
- [8] Новый подход ABBYY к переводу текстов. – URL: <http://joomla-master.org/books/html-css-php-cms/perevesti-tekst-v-onlaiene-pomojet-kompaniya-abby.html>.
- [9] Машинный перевод: правила против статистики. – URL: <http://filolingvia.com/publ/25-1-0-898>.
- [10] Turkiy tillar. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Turkiy_tillar.
- [11] Onlayn matn tarjimoni. – URL: <http://www.from-to.uz>.
- [12] Google tarjimoni. – URL: <http://translate.google.ru>.
- [13] Статистический машинный перевод. – URL: <https://yandex.ru/company/technologies/translation>.

СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Научный журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики» основан в 2015 году.

Свидетельство о регистрации СМИ за № 0856 выдано 5 августа 2015 года Узбекским Агентством по печати и информации.

Периодичность выхода – 4 выпуска в год.

Тематика журнала включает в себя следующие основные направления:

- математическое моделирование физических, технических, биологических и социально-экономических систем;
- вычислительная математика и численные методы для решения прикладных задач;
- решение обратных и некорректно поставленных задач;
- интеллектуальный анализ данных, распознавание образов и обработка изображений;
- искусственный интеллект и технологии обработки баз знаний;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- технологии программирования.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Правила подготовки и пример оформления статей можно загрузить с веб-страницы журнала <http://www.pvpm.uz>
2. Подготовленные файлы статей и экспертных заключений отправлять на адрес: submission@pvpm.uz
3. **Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.**
4. Представленные в редакцию рукописи авторам не возвращаются.
5. **Плата с авторов за публикацию статей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.**